MATH-F-101
Calcul Différentiel et Intégral 1
Partie 1

Denis Bonheure, Joel Fine et Nicolas Richard

2014-2015

1 Une première approche de l'analyse

1.1 C'est quoi l'analyse ?

L'analyse naît dans les années 1600, avec les travaux de Newton et Leibniz entre autres, mais des idées—surtout de l'intégrale—remontent à Archimède autour de 250 avant J.-C. Il s'agit d'un des domaines des mathématiques les plus importants, ayant des applications partout dans les sciences ainsi qu'une influence énorme sur les autres domaines des mathématiques.

Le concept central de l'analyse est celui de la *variation* d'une quantité. En science on s'intéresse souvent à l'évolution d'un système : étant donné sa position initiale comment prédire son état dans l'avenir ? Évidement les variations—et donc l'analyse—jouent un rôle primordial. Historiquement, l'analyse était conçu pour mieux comprendre la mécanique : les mouvements des planètes, la trajectoire d'un boulet de canon, etc. Plus récemment l'analyse se retrouve partout. En économie (prix d'un bien), en biologie (taille d'une population), en écologie (niveau de la mer) ainsi que dans d'autres sciences, on s'intéresse à des quantités qui évoluent dans le temps et donc à l'étude des variations, c'est à dire à l'analyse !

Pour définir la variation instantanée d'une quantité q par rapport au temps t, on considère d'abord les valeurs $q(t)$ et $q(t+h)$ de la quantité q en deux instants t et $t+h$. La différence $q(t+h) - q(t)$ est la variation totale après h unités de temps. La variation moyenne est donc

$$V(t,h) = \frac{q(t+h) - q(t)}{h}. \tag{1.1}$$

Pour trouver la variation *instantanée* de q en t, on considère la quantité $V(t,h)$ lorsque h devient de plus en plus petit. Autrement dit, *on prend la limite de* $V(t,h)$ *lorsque* h *tend vers zéro.* Si on met simplement $h = 0$ simultanément dans le numérateur et dans le dénominateur, on arrive à zéro divisé par zéro, qui n'a pas de sens. On doit donc trouver une manière plus raffinée de donner du sens à cette limite.

Dans ses début, l'analyse se basait sur l'intuition géométrique. Les premiers analystes réussirent à résoudre des problèmes spectaculaires, y compris la prédiction de l'orbite elliptique d'une planète ainsi que la construction des télescopes nécessaires pour vérifier cette prédiction. En revanche, il a été rapidement reconnu que les mêmes arguments qui avaient donné ses résultats remarquables peuvent mener à des conclusions complètement absurdes (voir plus tard pour des exemples). Comment donc savoir si on utilisait correctement les techniques de l'analyse ?

Le problème majeur venait de l'usage des quantités « infinitésimales ». Au début, les concepteurs de l'analyse traitaient h dans (1.1) comme étant « infiniment petit, » mais pas zéro. C'est dans l'usage de telles quantités infinitésimales que toutes les erreurs pouvaient se cacher. Ce n'est que dans les années 1800 qu'un traitement tout à fait rigoureux (selon les standards modernes) des limites a été développé et que l'analyse a vu l'apparition de ses fondations solides.

Cette approche rigoureuse de l'analyse a eu deux effets. Premièrement, les conclusions absurdes parfois obtenues par l'usage hasardeux des quantités infinitésimales ont été expliquées et sont désormais évitables. Deuxièmement, cette nouvelle approche, mettant la rigueur en valeur, a rendu possible la création de techniques plus puissantes et continue encore de nos jours à donner des solutions à des problèmes ardus dans de nombreux domaines scientifiques et mathématiques.

Dans ce cours nous expliquerons en toute rigueur le cœur de l'analyse : le calcul différentiel et intégral. Le passage des mathématiques, depuis la manière dont elles sont vues à l'école secondaire jusqu'au niveau d'abstraction requis pour un traitement tout à fait rigoureux de l'analyse, est difficile. Afin d'atténuer un peu les difficultés souvent rencontrées par les étudiants de première année, nous commencerons dans ce chapitre introductif avec une discussion intuitive et géométrique de la dérivée (§1.1.1), de l'intégrale (§1.1.2) et du théorème fondamental de l'analyse qui lie les deux concepts (§1.1.3). (Il est d'ailleurs fort probable que cette partie vous semble une répétition de ce que vous avez déjà rencontré à l'école secondaire.) Nous donnerons ensuite une indication de l'usage de l'analyse pour résoudre des équations différentielles (§1.2). Une équation différentielle est une équation dans laquelle apparait la variation d'une fonction. Ces équations sont d'une importance capitale dans les applications des mathématiques dans les sciences et notamment en physique.

Jusque là notre traitement sera basé sur l'intuition et la géométrie, dans l'esprit de ce que les pionniers de l'analyse faisaient. Nous terminerons la section avec quelques « paradoxes » qui monteront clairement que le traitement sans rigueur des quantités infinitésimales et des processus infinis mènent facilement à des contradictions (§1.3). Dès le deuxième chapitre nous n'accepterons plus une simple explication intuitive, il nous faudra aussi une démonstration rigoureuse.

AVERTISSEMENT !

Bien que nous commençons avec un niveau très bas de rigueur dans le premier chapitre, c'est le niveau que nous utiliserons dès que le deuxième chapitre que nous souhaitons vous faire acquérir et donc également celui que nous attendons de vous aux examens !

LES ARGUMENTS DONNÉS DANS CE CHAPITRE NE SONT PAS RIGOUREUX ET NE DOIVENT JAMAIS ÊTRE RÉPÉTÉS PENDANT UN EXAMEN !

Malgré cet avertissement, les arguments donnés dans ce chapitre seront présentés tout à fait rigoureusement dès que nous aurons introduit les définitions nécessaires.

1.1.1 Introduction intuitive à la dérivée d'une fonction

Dans la suite, le symbole $\mathbb{R}$ décrit *l'ensemble de tous les nombres réels*. Les éléments de $\mathbb{R}$ ne sont rien d'autre que les nombres que vous connaissez déjà : les nombres entiers, (..., -2,-1,0,1,2,3, ...), les fractions (comme, par exemple, $1/2, 3/5, \ldots$ etc.) et les nombres donnés par un développement décimal illimité qui ne se répète pas (par opposition à celui des fractions, qui sont périodiques). Nous représentons souvent $\mathbb{R}$ par les points d'une droite où zéro est disons « au milieu ». Pour le moment nous considérons donc les nombres réels comme suffisamment bien compris pour que nous n'ayons pas besoin de rappeler leurs propriétés. (Tout ça changera lorsque nous aurons vu les paradoxes à la fin de ce chapitre !)

Soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Il y a plusieurs manières de comprendre cette phrase, toutes étant équivalentes. Par exemple :

1. f est une règle qui associe à chaque nombre x un nouveau nombre $f(x)$;
2. f est une quantité qui dépend du temps, x secondes après le début de l'expérience, elle a la valeur $f(x)$;
3. f décrit une courbe dans le plan. Tout point du plan est de la forme (x, y) (après le choix de deux axes orthogonaux). La courbe qui correspond à f est décrite par les points de la forme $(x, f(x))$. Cette courbe s'appelle le graphe de f.

Définition 1.1 (Définition provisoire de la dérivée)**.** Étant donné la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nous disons que f est dérivable en x, si il est possible de définir sa variation instantanée en x. Dans ce cas, *la dérivée de f au point x* est cette variation instantanée, qui se note $f'(x)$.

Quand f est dérivable en tout point, nous disons que f est dérivable et la sa dérivée est la fonction $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où $f'(x)$ est la variation instantanée de f en x.

Nous verrons plus tard, un exemple d'une fonction f pour laquelle la dérivée n'est pas définie.

Encore une fois, il y a plusieurs manières de comprendre cette phrase, (toutes menant à la même définition). Par exemple :

1. La variation instantanée est donnée par la limite des variations moyennes décrites ci-dessus. La variation moyenne de f entre x et $x + h$ est donnée par

$$V(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

et donc la variation instantanée est donné par

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Nous ignorons totalement pour le moment que nous n'avons pas encore donné la définition rigoureuse d'une telle limite.

2. Supposons qu'un mobile se déplace le long d'une droite. Si $f(x)$ est la distance qui sépare ce mobile d'un point fixe, $V(x,h)$ est la vitesse moyenne du mobile entre x et $x+h$ secondes alors que $f'(x)$ est la vitesse instantanée du mobile à l'instant x.
3. Considérons le graphe de f. Étant donné x et h, dessinons la droite qui passe par les points $(x, f(x))$ et $(x+h, f(x+h))$. La pente de cette droite est $V(x,h)$. En prenant la limite des pentes $V(x,h)$ lorsque h tend vers zéro, nous obtenons $f'(x)$ qui est la pente de la droite tangente au graphe au point $(x, f(x))$.
4. Pour les petites valeurs de h, une bonne approximation de $f(x+h)$ est donnée par
$$f(x+h) \sim f(x) + f'(x)h.$$
5. Prenons un microscope et regardons le graphe de f autour de $(x, f(x))$ avec un grossissement de plus en plus important. A la limite, le graphe devient la droite qui passe par $(x, f(x))$ et dont la pente est $f'(x)$.

   Il est amusant de rappeler que le fait que quelque chose qui est « courbé » peut apparaître plat quand il est vu de très prêt est la raison pour laquelle nos ancêtres croyaient que la terre était plate.

Exemple 1.2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + b$. Le graphe de f est une droite de pente a et donc $f'(x) = a$ pour tout x.

On peut aussi calculer la variation moyenne :
$$V(x,h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h) + b - ax - b}{h} = a$$
et donc $f'(x) = \lim_{h\to 0} V(x,h) = a$.

En particulier, si $a = 0$ et f est une fonction constante, $f'(x) = 0$ pour tout x. La réciproque de ce fait semble évident. Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable avec $f'(x) = 0$ pour tout x alors f est constant. En effet, les tangentes au graphe sont toujours horizontales donc le graphe lui-même doit être aussi horizontal ce qui veut dire que f est constante. Démontrer rigoureusement ce fait par contre est un peu plus subtil. Nous verrons une autre justification un peu plus tard dans ce chapitre, mais la démonstration complètement correcte viendra plus tard.

Exemple 1.3. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = x^2$. Étant donné x, h, la variation moyenne de f entre x et $x+h$ est

$$\begin{aligned}V(x,h) &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h},\\ &= \frac{2xh+h^2}{h},\\ &= 2x+h.\end{aligned}$$

En prenant h petit, on peut rendre $V(x,h)$ aussi proche de $2x$ qu'on veut. Donc

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} V(x,h) = 2x.$$

Ce résultat est en accord avec notre interprétation graphique de la dérivée d'une fonction. Si vous dessinez le graphe de $f(x) = x^2$ et puis la droite tangente au graphe en (x, x^2), vous verrez que la pente de la droite tangente est $2x$.

Exemple 1.4. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = x^n$ où n est un entier positive. La variation moyenne de f entre x et $x+h$ est

$$V(x,h) = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Regardons le produit

$$(x+h)^n = (x+h)(x+h)\cdots(x+h)$$

En développant ce produit, nous arrivons à une somme de termes chacun de la forme $x^a h^b$, où a, b sont des entiers positifs avec $a+b=n$. Dans ce développement on prend soit x soit h de chaque facteur. On se demande maintenant, quel est le coefficient de $x^{n-1}h$ dans cette expression. Un tel terme survient quand on prend h une seule fois des n facteurs. On peut le faire dans n manières différentes (une pour chaque facteur) et donc le coefficient est n. Pareillement, le coefficient de x^n est simplement 1. On voit alors que

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + O(h^2)$$

Ici, $O(h^2)$ signifie tous les termes de la forme $x^a h^b$ où $b \geq 2$.

D'ici, nous pouvons procéder au calcul de $f'(x)$ comme le cas $= 2$ ci-dessus. Nous avons

$$\begin{aligned}V(x,h) &= \frac{(x+h)^n - x^n}{h}\\ &= \frac{x^n + nx^{n-1}h + O(h^2) - x^n}{h}\\ &= \frac{nx^{n-1}h + O(h^2)}{h}\\ &= nx^{n-1} + O(h).\end{aligned}$$

Ici, $O(h)$ signifie une somme dont tout membre est de la form $x^a h^b$ où $b \geq 1$. En prenant h petit on peut rendre cette somme aussi petite qu'on veut et donc

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} V(x,h) = nx^{n-1}$$

Exemple 1.5. Considérons la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Supposons qu'on s'interesse à la dérivée de f en zéro. La variation moyenne entre 0 et h est donnée par

$$V(0,h) = \frac{f(h)}{h}$$

Ici, nous devons traiter séparément les deux cas $h > 0$ et $h < 0$ (comme dans la définition de f). Quand $h > 0$,

$$V(0,h) = \frac{h}{h} = 1$$

alors que pour $h < 0$, on a

$$V(0,h) = \frac{-h}{h} = -1$$

Ceci est bien entendu en accord avec notre interprétation géométrique de la dérivée. Du coté droit de l'origine, le graphe de f est une droite de pente 1 alors que du coté gauche il s'agit d'une droite de pente -1. Il semble alors impossible de donner un sens à la limite de $V(0,h)$ lorsque h tend vers zéro. *On dit donc que f n'est pas dérivable en zéro.*

Exemple 1.6. Les fonctions trigonométrique sin et cos peuvent être définies de la façon suivante. Nous définissons d'abord *un radian*. Prenons le cercle de rayon 1, dans le plan, centré à l'origine. La distance autour du cercle entier est 2π. Notons $Q = (1,0)$ le point du plan où le cercle et le axe horizontal se rencontrent. Dessinons maintenant un rayon (une demi-droite) depuis l'origine. Ce rayon coupe le cercle en un point P. Nous disons que l'angle entre le rayon et le axe horizontal est t radians où t est la distance le long du cercle de Q à P. Un tour complet est alors 2π radians (le circumference du cercle), un demi-tour vaut π radians, un angle droite est $\pi/2$ etc.

Nous passons maintenant à la définition des fonctions trigonométriques. Soit $t \in \mathbb{R}$ et dessinons comme avant un rayon depuis l'origine du plan, faisant un angle de t radians avec l'axe horizontal (où l'angle est mesuré en radians et dans le sens opposé au sens des aiguilles d'une montre). Quand $t \in [0, 2\pi]$ on revient à ce qui est décrit dans le paragraphe ci-dessus. Pour t plus grand que 2π on considère le rayon comme ayant fait plus qu'un tour complet. Pour t négatif, on mesure l'angle dans l'autre sens. Maintenant nous considérons le point $P(t)$ où le rayon et le cercle unitaire se rencontrent. Ce point a deux composantes : $P(t) = (\cos(t), \sin(t))$ que nous prenons comme la définition des fonction $\sin, \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Nous calculons maintenant la dérivée de sin. La variation moyenne de sin entre x et $x+h$ est donnée par

$$V(x,h) = \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

Afin de simplifier cette expression, il nous faut la formule suivante pour le sinus d'une somme :

$$\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)$$

Or, nous allons considérer la limite de $V(x,h)$ lorsque h tend vers zéro. Quand h est très petit, le rayon qui apparaît dans la définition ci-dessus de sin et cos se trouve très proche à l'axe horizontal. En regardant le point $P(h)$ pour h petit, on voit que la hauteur verticale de $P(h)$ est presque la même que la distance de l'axe en suivant le cercle unité. Cette deuxième distance est simplement h (parce que nous utilisons les radians pour mesurer l'angle !) et donc quand h est petit, $\sin(h) \sim h$. De même, vu que $P(h)$ est très proche de l'axe horizontal, pour h petit, $\cos(h) \sim 1$. Donc, pour les petites valeurs de h, nous avons que

$$V(x,h) \sim \frac{\sin(x) + h\cos(x) - \sin(x)}{h} = \cos(x),$$

et il s'ensuit que

$$\sin'(x) = \cos(x).$$

Un raisonnement similaire donne $\cos'(x) = -\sin(x)$. Pouvez-vous fournir les détails ?

Un bon exercice pour améliorer votre compréhension de ces calculs est de dessiner les graphes de sin et cos sur la même page. Vous devriez voir que la pente de la droite tangente au graphe de sin en x est bien $\cos(x)$ alors que la pente de la tangente au graphe de cos en x est bien $-\sin(x)$.

Exemple 1.7. Soit $a \in \mathbb{R}$ et considérons la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = a^x$. Il faut probablement réfléchir pour comprendre ce que l'expression a^x veut dire. Pour un entier n strictement positif, a^n a un sens clairement sans équivoque : on prend simplement le produit de a avec lui-même n fois. Mais comment étendre cette définition aux autres puissances ?

On commence avec l'observation que si n et m sont les deux entiers strictement positifs, nous avons que $a^{n+m} = a^n a^m$. Nous voulons définir ensuite a^x pour x quelconque *en gardant cette même règle*. Dans le cas de a^n où n est un entier négatif, nous verrons que ceci est bien possible et de façon unique. Commençons avec la définition de a^0. La seule manière pour que la formule $a^{n+0} = a^n a^0$ soit valable est d'imposer $a^0 = 1$. Maintenant nous voyons que notre souhait que $a^n a^{-n} = a^0 = 1$ nous oblige à définir $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ce qui étend la définition de a^n à tous les entiers n.

La prochaine étape est de définir $a^{1/n}$ pour un entier non-nul n. Encore une fois, nous désirons que la formule $a^{p+q} = a^p a^q$ reste vraie. Ceci nous oblige à définir $a^{1/n}$ de sorte que $(a^{1/n})^n = a^1 = a$. Donc la seule possibilité est de mettre $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$, la n^{e} racine de a. (Voir la section 2.2 pour une définition rigoureuse.)

Ensuite, nous tentons de définir $a^{m/n}$ où m, n sont des entiers, $n \neq 0$. Vu que $\frac{m}{n} = \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}$ (avec m termes dans la somme) la seule manière de garder notre règle $a^p a^q = a^{p+q}$ est de mettre $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$.

Nous avons maintenant défini a^x pour tout nombre x de la forme m/n où m, n sont des entiers (et $n \neq 0$). Un tel nombre est dit un *nombre rationnel* et l'ensemble de tous les rationnels se note $\mathbb{Q}$. Ce qui nous manque pour le moment est une définition de a^x pour des nombres x *irrationnels* (ceux dont le développement décimal est illimité et non périodique). Observons que nous n'avons pas encore vu qu'il existe des nombres irrationnels, pour ça il faut attendre le deuxième chapitre.

Si on dessine les points (q, a^q) dans le plan pour $q \in \mathbb{Q}$ — c'est-à-dire le graphe de $f(x) = a^x$ — on voit qu'il se trouve tous sur une belle courbe et on peut définir a^x pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en prenant la hauteur de cette courbe au dessus du point $(x, 0)$ sur le axe x. Ceci n'est pas une définition rigoureuse, mais nous ignorons ce point pour le moment, en supposant qu'une telle définition existe et que la règle $a^{x+y} = a^x a^y$ reste vraie pour toutes puissances $x, y \in \mathbb{R}$.

Maintenant nous considérons la dérivée de la fonction $f(x) = a^x$. La variation moyenne de f entre x et $x + h$ est donné par

$$\begin{aligned} V(x,h) &= \frac{a^{x+h} - a^x}{h}, \\ &= \frac{a^x(a^h - 1)}{h}, \\ &= a^x V(0,h). \end{aligned}$$

Ici, $V(0, h)$ est la variation moyenne de f entre 0 et h. Pour passer de la première ligne à la deuxième nous avons utilisé la règle $a^{x+h} = a^x a^h$. En prenant la limite de $V(x, h)$ lorsque h tend vers zéro, nous obtenons

$$f'(x) = a^x f'(0).$$

Pour calculer la dérivée de f en x il suffit alors de connaître la dérivée de f en 0.

La dérivée $f'(0)$ dépend de a. En faisant des esquisses des graphes de $f(x) = a^x$ pour des valeurs différentes de a, on se convainc rapidement des faits suivants :

1. $f'(0)$ dépend d'une manière croissante de a : si a grandit, $f'(0)$ grandit aussi.
2. En prenant a grand et positif, on peut rendre $f'(0)$ aussi grand qu'on veut.
3. Dans l'autre direction, en prenant a prés de 1 on peut rendre $f'(0)$ aussi proche de zéro qu'on veut.

D'ici on voit qu'il existe une seule valeur de a telle que $f'(0) = 1$. Cette valeur particulière est notée e. Nous avons vu alors que la fonction $f(x) = \mathrm{e}^x$ a la propriété que $f'(x) = f(x)$, autrement dit *la fonction* e^x *est sa propre dérivée.* Nous verrons bien tôt que c'est effectivement la seule fonction (et ses multiples) avec cette propriété.

Le nombre e est une des deux plus importantes constantes en mathématiques (l'autre étant π). On peut calculer que $\mathrm{e} = 2.7182818\ldots$. Le développement ne cesse jamais et il ne se répète pas non plus. (La démonstration de ce fait est faisable avec les outils que vous apprendrez dans ce cours, mais nous ne l'aborderons pas.) Nous verrons beaucoup plus tard dans le cours une manière efficace de calculer de bonnes approximations de cette constante.

Dérivées d'ordre supérieur

On peut bien sûr considérer la variation de la variation, autrement dit la dérivée d'ordre 2 d'une fonction, etc.

> **Définition 1.8.** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et supposons que sa dérivée f' est dérivable en x. Nous disons alors que f est deux fois dérivable en x et nous notons cette deuxième dérivé par $f''(x)$.

De façon analogue, nous parlons de la troisième dérivée, f''', ou même de la k^{e} qui se note $f^{(k)}$.

Les dérivées d'ordre supérieur sont très importantes. Par exemple, la deuxième dérivée de la position d'un mobile livre son *accélération* et c'est justement cette quantité physique qui apparaît dans les équations de Newton.

Il y a aussi une façon géométrique d'interpreter la deuxième dérivée. Étant donné une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, regardons son graphe. Si $f''(x) > 0$ la pente du tangent en x est entrain de grandir. Ça veut dire que le graphe est *concave* près de $(x, f(x))$. Pareillement, si $f''(x) < 0$, alors la pente du tangent au graphe en x diminue et donc le graphe est *convexe.*

Notation de Leibniz

Il y a une autre manière pour noter la dérivée d'une fonction, celle introduite par Leibniz. Cette deuxième notation met en valeur la définition d'une variation instantanée comme la limite des variations moyennes. Étant donné une fonction f et les points $x, x+h$, nous écrivons $\delta f = f(x+h) - f(x)$ pour la variation totale de f ainsi que $\delta x = h$ pour la variation totale de x. Donc la variation moyenne est

$$V(x,h) = \frac{\delta f}{\delta x}.$$

En passant à la limite lorsque δx tend vers zéro, on arrive à la dérivée qui se note souvent dans ce contexte

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.$$

Les δ sont devenus d pour indiquer qu'on a pris la limite.

Cette notation a ses avantages et ses désavantages. Elle rappelle que la définition de la dérivée est la limite des variations moyennes. Mais elle peut aussi nous tenter de traiter $\mathrm{d}f$ et $\mathrm{d}x$ comme des nombres réels. Ceci n'est absolument pas le cas. Bien que le numérateur δf et le dénominateur δx dans l'expression de $V(x,h)$ sont des nombres réels, dans le passage à la limite ils deviennent zéro. Leur quotient a du sens lorsqu'on prend la limite, mais c'est en parlant de $\mathrm{d}f$ et de $\mathrm{d}x$ séparément comme des nombres réels et en les traitant effectivement comme des quantités infinitésimales, que toutes les erreurs et les paradoxes surgissent.

N'écrivez jamais $\mathrm{d}f$ ***ou*** $\mathrm{d}x$ ***tout seul dans un argument rigoureux.***

(En fait, il y a un moyen de donner du sens aux expressions de la forme $\mathrm{d}x$, mais pour ça il faut la théorie des formes différentielles que vous aborderez à partir de la 3ᵉ année.) Pour les dérivées d'ordre supérieur, il y a aussi une notation due à Leibniz : la k^{e} dérivée de f est parfois notée

$$\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$$

ce qui évoque l'idée qu'on a appliqué l'opération $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ — c'est-à-dire « prendre la dérivée » — k fois.

En général, dans ce cours, nous préférerons la notation $f'(x)$, due à Newton. Mais de temps en temps, celle de Leibniz rendra les formules plus simple à mémoriser.

Techniques pour calculer les dérivées

Dans la suite, nous aurons besoin des techniques pour calculer les dérivées des fonctions construites à partir des autres fonctions données. Nous les énonçons ici avec des petites justifications. Les démonstrations correctes attendront jusqu'à ce que nous ayons une définition rigoureuse de la dérivée en main.

Proposition 1.9. *Soit $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions qui sont dérivables en $a \in \mathbb{R}$.*

1. *La fonction $(f+g)$ donnée par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ est dérivable en a et*
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$
2. *La fonction fg donnée par $(fg)(x) = f(x)g(x)$ est dérivable en a et*
$$(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a).$$

Pour justifier le premier point, il suffit de constater que la variation moyenne de $f+g$ est la somme des variations moyennes de f et de g.

Le deuxième résultat, sur la dérivée du produit, s'appelle *la règle de Leibniz*. Voilà une justification basée sur la géométrie. Étant donné $a \in \mathbb{R}$, considérons un rectangle dont un coté est de longueur $f(a)$ et l'autre est de longueur $g(a)$. La fonction fg donne simplement l'aire de ce rectangle.

En passant de a à $a+h$, nous obtenons un deuxième rectangle qui est formé de quatre morceaux rectangulaires :

1. un morceau est juste le rectangle de départ, ayant cotés de longueur $f(a)$ et $g(a)$;
2. un morceau a un coté de longueur $f(a)$ et l'autre de longueur $g(a+h)-g(a)$;
3. un morceau a un coté de longueur $g(a)$ et l'autre de longueur $f(a+h)-f(a)$;
4. un morceau a un coté de longueur $f(a+h)-f(a)$ et l'autre de longueur $g(a+h)-g(a)$.

Au niveau algébrique, ceci correspond au développement

$$\begin{aligned} f(a+h)g(a+h) &= \big(f(a+h)-f(a)+f(a)\big)\big(g(a+h)-g(a)+g(a)\big) \\ &= f(a)g(a)+\big(f(a+h)-f(a)\big)g(a)+f(a)\big(g(a+h)-g(a)\big) \\ &\quad + \big(f(a+h)-f(a)\big)\big(g(a+h)-g(a)\big). \end{aligned}$$

Or, pour les petites valeurs de h, nous savons que $f(a+h) \sim f(a)+f'(a)h$ et que $g(a+h) \sim g(a)+g'(a)h$ et donc les contributions des quatre morceaux à l'aire du rectangle donnent

$$f(a+h)g(a+h) \sim f(a)g(a)+\big(f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\big)h+f'(a)g'(a)h^2.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} \sim f'(a)g(a)+f(a)g'(a)+f'(a)g'(a)h$$

et la limite de cette quantité lorsque h tend vers zéro nous donne bien $f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$. Effectivement ce n'est que l'aire des morceaux 2 et 3 ci-dessus qui contribuent dans la limite à la variation instantanée de l'aire du grand rectangle.

Nous aurons aussi besoin de *la règle de dérivation en chaîne* :

Proposition 1.10. *Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions et supposons que g est dérivable en a et f est dérivable en $g(a)$. Alors la fonction composée $f \circ g$ définie par $(f\circ g)(x) = f(g(x))$ est dérivable en a et*

$$(f\circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a).$$

Il y a aussi une belle justification géométrique de ce résultat (mais nous insistons encore une fois qu'une *démonstration* n'est possible que lorsque nous aurons correctement défini la dérivée). Pour la justification, nous commençons avec le graphe de $f(x)$ et nous interprétons g comme un changement de la variable x. Pour les petites valeurs de h, $g(a+h) \sim g(a)+g'(a)h$ et donc tout près de a ce changement a l'effet de *compresser* l'axe horizontal d'un facteur qui est plus ou moins constant et égal à $g'(a)$. Or, si on dessine une droite de pente d et puis qu'on compresse l'échelle sur l'axe horizontal d'un facteur $g'(a)$, la droite est transformée en une nouvelle droite de pente $dg'(a)$. De façon analogue, si on dessine le graphe de f et puis qu'on compresse l'échelle horizontale d'un facteur $g'(a)$, la pente de la droite tangente au graphe en $(g(a), f(g(a))$ est maintenant $f'(g(a))g'(a)$.

On peut aussi voir ce résultat à la lumière du fait que la dérivée fournit une approximation affine d'une fonction. Nous savons que pour h et k petits,

$$g(a+h) \sim g(a) + g'(a)h, \qquad f(b+k) \sim f(b) + f'(b)k$$

Or,

$$(f \circ g)(a+h) \sim f\big(g(a) + g'(a)h\big) \sim f(g(a)) + f'(g(a))g'(a)h$$

où dans la deuxième approximation nous avons pris $b = g(a)$ et $k = g'(a)h$.

La dernière technique importante pour ce chapitre consiste à savoir trouver la dérivée d'une fonction réciproque.

Définition 1.11. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Elle est dite *injective* si $f(x) = f(y)$ entraîne que $x = y$.
- Elle est dite *surjective* si pour tout $y \in \mathbb{R}$ il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.
- Elle est dite *bijective* si elle est injective et surjective.

Quand f est bijective, nous définissons une deuxième fonction, appelée *la réciproque* ou *l'inverse* de f, et qui se note $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, par $f^{-1}(x) = y$ où y est la solution unique de l'équation $f(y) = x$. (La solution existe parce que f est surjective, et elle est unique parce que f est injective.)

À vous de trouver des exemples des fonctions injectives, surjectives et bijectives. L'injectivité entraîne-t-elle une forme particulière du graphe de la fonction ?

Nous donnons à présent le résultat suivant qui explique comment la dérivée de la réciproque est liée à celle de la fonction originale.

Proposition 1.12. *Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective et dérivable. Supposons en plus que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \neq 0$. Alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable et*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

où $f(a) = b$.

Ce résultat s'explique facilement du point de vu graphique, comme dessiné dans figure 1.1.1. Étant donné une bijection $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, le graphe de la fonction réciproque est simplement la réflexion du graphe de f par rapport à la droite d'équation $y = x$. Cette même réflexion convertit la droite tangente au graphe de f en $(a, f(a))$ en la droite tangente au graphe de f^{-1} en $(b, f^{-1}(b))$, où $b = f(a)$. Comme la tangente au graphe de f en $(a, f(a))$ est de pente $f'(a)$, nous voyons que la pente de la droite réfléchie vaut $\frac{1}{f'(a)}$.

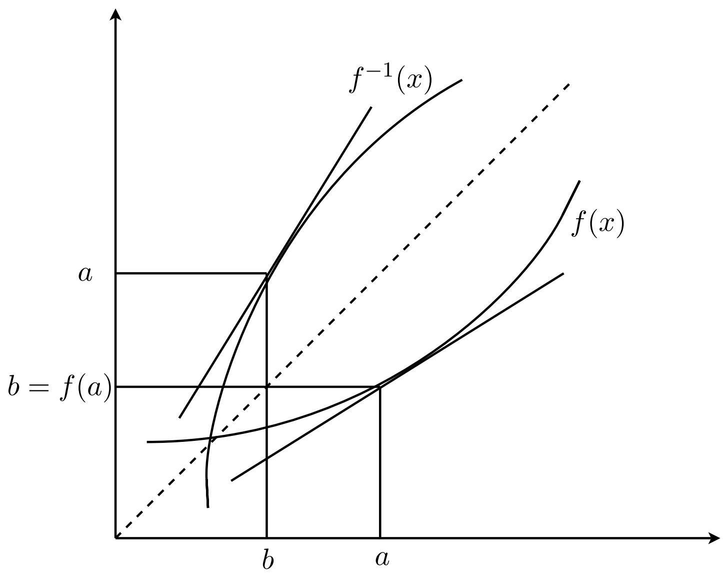


Figure 1 – Symétrie des tangentes aux graphes de f et f^{-1}.

Exemple 1.13. Nous considérons la fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \mathrm{e}^x$. Nous voyons à partir du graphe de f qu'elle est bien injective et que l'ensemble des images est l'ensemble des réels strictement positifs, qui se note $\mathbb{R}_0^+$. Son inverse est la fonction logarithme $\log \colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$. (Cette fonction s'appelle le logarithme « naturel » si on veut mettre en valeur que nous parlons des puissances de e et pas d'un autre nombre. On la voit notée souvent par $\ln(x)$.)

Le résultat précédent nous permet de calculer la dérivée du logarithme à partir du fait que $f'(x) = f(x)$. Nous avons en effet

$$(\log)'(y) = \frac{1}{y}$$

pour tout $y \in \mathbb{R}_0^+$.

À partir des propositions 1.9, 1.10 et 1.12 on peut calculer les dérivées de fonctions assez compliquées. Il y a plusieurs exemples dans les exercices avec lesquelles vous pourrez vous entrainer !

1.1.2 Introduction intuitive à l'intégrale d'une fonction

Nous passons maintenant au deuxième concept fondamental de l'analyse : *l'intégrale.*

Définition 1.14 (Définition provisoire de l'intégrale)**.** Étant donné une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et deux nombres réels $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b > a$, l'intégrale de f de a à b est l'aire comprise entre le graphe de f, l'axe horizontal et les deux droites verticales $x = a$ et $x = b$. Cette aire se note

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dans le calcul de cette aire, nous comptons la partie qui se trouve en dessous de l'axe horizontal avec le signe *négatif.* L'intégrale est donc l'aire « signée » entre le graphe et l'axe horizontal.

Exemple 1.15. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = Ax + B$ où $A, B \in \mathbb{R}$ sont des nombres réels. Supposons que $f(a), f(b) > 0$ et donc que la partie du graphe de f qui nous intéresse se trouve au dessus de l'axe horizontal. Dans ce cas l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

est l'aire du trapèze ayant pour base le segment de droite de $(a, 0)$ à $(b, 0)$, pour arrêtes verticales les droites $x = a$ et $x = b$ et pour sommets supérieurs $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Donc

$$I = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))(b - a) = \frac{1}{2}\,(A(a + b) + 2B)(\,b - a).$$

Pouvez-vous vérifier que cette même formule donne encore l'intégrale quand le graphe de f coupe l'axe horizontal en un point d'abcisse comprise entre a et b ?

Pour calculer l'intégrale de f quand son graphe est plus compliqué que celui de l'exemple ci-dessus, nous suivons une approche semblable à celle utilisée pour calculer la pente d'une tangente : nous commençons avec une approximation affine et puis nous prenons une limite. Pour calculer une approximation de l'aire, nous divisons la droite horizontale entre a et b en morceaux. Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ une suite de nombres réels avec $a = x_0$, $b = x_n$ et $x_{i+1} > x_i$. Nous approximons alors l'aire que nous souhaitons calculer en considérant des morceaux rectangulaires. Le i^{e} rectangle a comme arrêtes verticales les droites $x = x_{i-1}$ et $x = x_i$, sa base est l'axe horizontal et sa hauteur est $f(x_{i-1})$. Son aire est donc

$$A_i = (x_i - x_{i-1})f(x_{i-1}).$$

Une approximation de l'intégrale est dès lors donnée par la somme des aires des rectangles, c'est-à-dire

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \sim \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

Pour calculer l'intégrale exactement, nous devons prendre la limite de cette somme lorsque la largeur des subdivisions $(x_i - x_{i-1})$ tend vers zéro.

Exemple 1.16. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Pour calculer

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

nous fixons un entier $n > 0$ et nous écrivons $x_i = i/n$ pour $i = 0, \ldots, n$. Nous avons coupé la droite horizontale entre 0 et 1 en n morceaux de mêmes largeurs. Pour n donné, notre approximation de I est alors

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2.$$

Le problème revient donc maintenant à calculer la somme des carrés des $n-1$ premiers entiers. La formule — que vous pouvez démontrer vous-même en suivant les conseils dans les feuilles d'exercices — est

$$\sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

Donc notre subdivision fournit l'approximation

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Quand n tend vers l'infini, les points x_i « remplissent » la droite horizontale entre 0 et 1. Les deuxième et troisième termes du coté droit de l'égalité tendent vers zéro et donc la limite donne

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

1.1.3 Explication intuitive du théorème fondamental de l'analyse

Nous expliquons à présent un des résultats centraux du cours, le théorème fondamental de l'analyse. Celui-ci affirme que l'intégration et la dérivation sont en fait des opérations inverses l'une de l'autre. Il y a deux manières d'énoncer le théorème.

Théorème 1.17 (Théorème fondamental de l'analyse, première version)**.** *Soit* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $a \in \mathbb{R}$*. Alors la fonction* $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *donnée par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$*, et* $F'(x) = f(x)$*.*

Nous ne donnons pas pour le moment une définition précise d'une fonction continue. Pour l'instant vous pouvez penser qu'une fonction continue est une fonction dont le graphe peut se dessiner en gardant son stylo sur la page. Nous signalerons dans notre justification de ce théorème où cette hypothèse joue un rôle.

Pour expliquer le théorème, nous devons considérer la variation moyenne de F entre x et $x+h$:

$$V(x,h) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Géométriquement, $\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ fournit l'aire entre le graphe de f et l'axe horizontal, entre les abscisses x et $x+h$. Or, quand h est très petit, les valeurs de $f(t)$ pour t entre x et $x+h$ ne changent pas beaucoup. Donc pour h petit, f est effectivement constant :$f(t) \sim f(x)$ pour tout t entre x et $x+h$. C'est en faisant cette approximation que nous utilisons le fait que f est continue. En passant de x à $x+h$ nous avons plus ou moins ajouté un rectangle d'aire $hf(x)$. Donc pour h très petit, nous avons que $V(x,h) \sim f(x)$ et dans la limite lorsque h tend vers zéro nous obtenons $F'(x) = f(x)$.

Théorème 1.18 (Théorème fondamental de l'analyse, deuxième version)**.** *Soit* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable. Alors*

$$\int_a^b f'(x)\ \mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

La fonction $f'(x)$ est la variation instantanée de f. En prenant l'intégrale, nous prenons en effet la somme de toutes les variations instantanées de f entre a et b. Le théorème nous dit que cette « somme » donne la variation totale de f en passant de a à b.

Pour une explication un peu plus complète, prenons un entier $n > 0$ et coupons l'intervalle de a à b en n morceaux, chacun de largueur $(b-a)/n$. Autrement dit, nous prenons $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$ et puis nous considérons l'approximation de l'intégrale donnée par

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f'(x_{i-1})$$

qui donne l'intégrale lorsque nous prenons la limite lorsque n tend vers l'infini.

Rappelons que pour h petit,

$$f(x_{i-1} + h) \sim f(x_{i-1}) + hf'(x_{i-1})$$

Si on met $h = \frac{b-a}{n}$, qui est certainement de plus en plus petit quand n est grand, nous obtenons

$$f'(x_{i-1}) \sim \frac{n}{b-a}\big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)$$

et donc pour n très grand, l'approximation de l'intégrale donne :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f'(x_{i-1}) &\sim \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) && (1.2)\\
&= f(x_n) - f(x_{n-1}) + f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) + \cdots - f(x_0) && (1.3)\\
&= f(b) - f(a). && (1.4)
\end{aligned}$$

En prenant la limite lorsque n tend vers l'infini nous voyons que

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a).$$

Un des usages principaux du théorème fondamental de l'analyse est le calcul des intégrales. Pour ça il faut reconnaître l'intégrand (la fonction dont on prend l'intégrale) comme la dérivée d'une autre fonction.

Au mieux on connaît les dérivées des fonctions standard,
plus l'intégration est facile.

Exemple 1.19. Nous revenons à l'intégrale de la fonction x^2, qui avait été calculée ci-dessus en coupant la droite en morceaux. Maintenant, nous reconnaissons $g(x) = x^2$ comme une dérivée, $g(x) = f'(x)$, où $f(x) = \frac{1}{3}x^3$. Donc,

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Ici, la notation $[f(x)]_a^b$ veut dire simplement $f(b) - f(a)$. Ceci est bel et bien en accord avec le calcul fait auparavant.

Exemple 1.20. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(x) = 0$ pour tout x. Nous avons déjà discuté qu'une telle fonction doit être constante et nous pouvons maintenant donner une démonstration de ce fait à partir du théorème fondamental de l'analyse. Si $f'(x) = 0$, alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Les points a, b étant arbitraire, nous voyons que f est bien constante.

De façon analogue, si $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions telles que $f'(x) = g'(x)$ pour tout x, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = g(x) + c$. Pour le voir, nous constatons que la fonction $f - g$ possède une dérivée nulle partout.

Primitives

Soit f une fonction donné et considérons l'équation suivante pour F, une fonction à trouver :

$$F'(x) = f(x) \tag{1.5}$$

Définition 1.21. Une solution F de l'équation (1.5) est appelée *une primitive* de f.

Nous venons de voir qu'une primitive de f, s'il en existe une, est unique à une constant près (l'exemple 1.20 s'applique à la différence de deux primitives). Le théorème fondamental de l'analyse nous assure que si la fonction f est continue, alors elle possède une primitive donnée par

$$f(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

pour un choix quelconque de $a \in \mathbb{R}$. Changer a revient à ajouter une constante à f. On écrit souvent $F = \int f$ pour dire que F est une primitive de f. On parle de $\int f$ ou bien $\int f(t)\,\mathrm{d}t$ comme d'une intégrale « indéfinie ». Nous nous rappelons que $\int f$ n'est définie qu'à une constante près. Pour le mettre en valeur, on écrit souvent $\int f + C$ pour « la » primitive de f.

Techniques pour calculer les intégrales

Maintenant que nous savons que prendre l'intégrale n'est autre que l'opération inverse de prendre la dérivée, nous pouvons convertir nos techniques pour calculer les dérivées en outils pour trouver les intégrales. Voilà les énoncés et justifications.

Proposition 1.22 (Intégration par parties)**.** *Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continûment dérivables. Alors,*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ici la phrase « *f est continûment dérivable* » veut dire que la dérivée f' de f est continue. L'intégration par parties est la version intégrale de la règle de Leibniz pour trouver la dérivée d'un produit. Pour le justifier, notons $h(x) = f(x)g(x)$. La règle de Leibniz nous donne $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Donc par le théorème fondamental de l'analyse :

$$\int_a^b h'(x)\,\mathrm{d}x = [h(x)]_a^b$$

ce qui veut dire que

$$\int_a^b \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b\,.$$

Le résultat découle d'un petit réarrangement de cette équation.

On peut aussi écrire l'integration par parties en termes des primitives. La règle de Leibnize dit que fg est une primitive de $f'g + fg'$ où bien que

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

On peut utiliser cette formule pour trouver une primitive de $f'g$ à condition qu'on connaisse les primitives de f' et de fg'.

Exemple 1.23. Pour trouver une primitive de $\log(x)$, nous appliquons l'intégration par parties. Écrivons alors

$$\log(x) = 1 \cdot \log(x).$$

Pour que le coté droite est de la forme $f'(x)g(x)$, nous cherchons d'abord f tel que $f' = 1$. Une telle primitive est facile de trouver, il s'agit de $f(x) = x$. Donc,

$$\begin{aligned}
\int \log(x)\mathrm{d}x &= \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x, \\
&= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x, \\
&= x\log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x, \\
&= x\log(x) - \int \mathrm{d}x, \\
&= x(\log(x) - 1).
\end{aligned}$$

Nous avons obtenu que $x(\log(x) - 1)$ est une primitive de $\log(x)$. Pour vérifier notre résultat, il suffit de prendre la dérivée et de voir qu'on obtient bien $\log(x)$. Cette simple remarque vous permet d'éviter presque toutes les erreurs qui surviennent pendant vos calculs d'intégrales et de primitives !

Quand on cherche la primitive d'une fonction, on peut facilement vérifier que la solution est correcte en prenant la dérivée de la fonction obtenue.

Exemple 1.24. Nous voulons calculer

$$\int_1^2 x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$$

Soient $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$. Avec ce choix de f et g, l'intégrale donnée est de la forme

$$\int_1^2 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

En prenant l'intégrale par parties, nous avons que

$$\begin{aligned}\int_1^2 x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}\right]_1^2 - \int_1^2 1\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x,\\ &= \left(\mathrm{e}^4 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^2\right) - \left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\right]_1^2,\\ &= \left(\mathrm{e}^4 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^2\right) - \left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^4 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^2\right),\\ &= \frac{1}{4}\mathrm{e}^2\left(3\mathrm{e}^2 - 1\right).\end{aligned}$$

Nous avons aussi la version intégrale de la règle de dérivation en chaîne.

Proposition 1.25 (Changement de variable)**.** *Soit f continue et soit g continûment dérivable. Supposons que $g(\alpha) = a$ et $g(\beta) = b$. Alors,*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour justifier cette proposition, notons $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(t) = F(g(t))$. Par la règle de dérivation en chaîne et puis le théorème fondamental de l'analyse, nous déduisons que

$$\begin{aligned}G'(t) &= F'(g(t))g'(t),\\ &= f(g(t))g'(t).\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} f\big(g(t)\big)g'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\alpha}^{\beta} G'(t)\,\mathrm{d}t,\\ &= G(\beta) - G(\alpha),\\ &= F(g(\beta)) - F(g(\alpha)),\\ &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

La formule ci-dessus explique ce qui se passe quand on change la variable dans l'intégrale par une autre variable t qui est liée à x par l'équation $x = g(t)$. La notation de Leibniz donne une manière mnémotechnique de retenir cette formule. En effet,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g'(t)$$

Alors, si on pouvait traiter dx et dt comme des nombres, on pourrait écrire

$$\mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t$$

D'ici, la formule

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t$$

serait immédiate. Le problème avec ce raisonnement est que les quantités « dx » et "dt" n'existe pas indépendamment et donc cet argument n'a pas réellement de sens. Pour nous, la seule valeur de cet argument est celle d'un aide mémoire.

Exemple 1.26. Nous voulons trouver

$$\int_0^r x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Soit $g(t) = t^2$. Alors $g'(t) = 2t$. Si $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ alors $(f \circ g)(t)g'(t) = 2t\mathrm{e}^{-t^2}$. Donc,

$$\begin{aligned}\int_0^r t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^r (f \circ g)(t)g'(t)\,\mathrm{d}t,\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{r^2} \mathrm{e}^{-x}, \mathrm{d}x,\\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-r^2}\right).\end{aligned}$$

Si on préfère utiliser l'aide mémoire directement, on met $t = x^2$, donc « $\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$ ». De plus, $x = r$ implique que $t = r^2$. Alors,

$$\int_0^r x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{r^2} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

et on continue comme précédemment.

Exemple 1.27. Supposons qu'on cherche une primitive de $f(x) = \tan(x)$. Écrivons $u(x) = \cos(x)$. Alors $\mathrm{d}u = -\sin(x)\mathrm{d}x$ et donc

$$\begin{aligned}\int f(x)\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= -\log u \\ &= -\log(\cos(x))\end{aligned}$$

Comme toujours, nous vérifions notre calcul en prenant sa dérviée :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\log(\cos(x))\right) &= -\frac{1}{\cos(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x) \\ &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ &= \tan(x)\end{aligned}$$

1.2 Application : équations différentielles

Nous avons tout ce qu'il faut maintenant pour voir les premières applications de l'analyse aux équations différentielles. Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction f et dans laquelle les dérivées de f apparaissent.

1.2.1 Équations linéaires du premier ordre

On a déjà vu un exemple très simple d'une équation différentielles, celle d'une primitive : $f' = g$ où g est une fonction donnée et f est la fonction inconnue. Cette équation est un cas particulier d'une classe importante d'équations, celle de la forme suivante :

$$f'(x) + p(x)f(x) = q(x). \tag{1.6}$$

où p et q sont des fonctions données.

Nous résoudrons cette équation avec l'aide d'une fonction « auxiliaire » $M\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. L'idée est de multiplier les deux cotés de l'équation par M pour obtenir

$$Mf' + Mpf = Mq$$

Cet artifice a pour but de faire apparaître du coté gauche la dérivée d'un produit, à savoir $(Mf)'$. Vu que $(Mf)' = Mf' + M'f$, il nous faut choisir M de sorte que $M' = Mp$.

Supposons pour le moment que nous avons trouvé une telle fonction M. Alors, il nous suffit simplement de chercher f de telle sorte que $Mf' + M'f = Mq$. En d'autres mots,

$(Mf)' = Mq$. Or, si la fonction Mq est continue, elle possède une primitive W donnée par le théorème fondamental par

$$W(x) = \int_a^x M(t)q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Finalement, $f = W/M$ est une solution de l'équation (1.6).

Il ne nous reste donc plus qu'à résoudre l'équation $M' = Mp$. Pour ce faire, supposons que P est une primitive de p (l'existence de P est garantie par le théorème fondamental de l'analyse quand p est continue). En choisissant $M(x) = \mathrm{e}^{P(x)}$, nous voyons par la règle de dérivation en chaîne que $M' = P'(x)\mathrm{e}^{P(x)} = p(x)M(x)$.

En résumé, pour résoudre l'équation $f'+pf = q$, nous avons procédé de la façon suivante. Soient

- P une primitive de p,
- $M = \mathrm{e}^P$, et
- W une primitive de Mq.

La solution est

$$f = W\mathrm{e}^{-P}.$$

Il est facile de vérifier que cette formule donne bien une solution de l'équation ; il suffit de prendre la dérivée :

$$f' = W'\mathrm{e}^{-P} - WP'\mathrm{e}^{-P} = q\mathrm{e}^{P}\mathrm{e}^{-P} - Wp\mathrm{e}^{-P} = q - pf$$

Le fait que cette vérification est beaucoup plus simple que de trouver f nous apprend la chose suivante :

Après avoir trouvé une solution d'une équation différentielle, vérifiez que c'est bien une solution en calculant ses dérivées !

Il ne vous prendra que quelques instants pour vérifier que la solution est juste.

Arrêtons-nous sur la question de l'unicité de la solution que nous venons de trouver. Soient f et $\tilde{f}$ deux solutions de (1.6) satisfaisant de plus $f(x_0) = y_0 = \tilde{f}(x_0)$. Nous allons voir que $f = \tilde{f}$. Autrement dit, la solution de (1.6) est unique dès qu'on précise une *condition initiale*. Le problème « trouver f tel que $f' + pf = q$ et $f(x_0) = y_0$ » est un *problème aux conditions initiales* aussi appelé *problème de Cauchy*.

Pour voir que la solution est unique, considérons $g = f - \tilde{f}$. Il découle de (1.6) pour f et $\tilde{f}$ que g est une solution de l'équation

$$g' + pg = 0, \tag{1.7}$$

et $g(x_0) = 0$.

Théorème 1.28. *Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation (1.7), où p est continue. Si g s'annule en un point, alors g est constante.*

Par conséquent, étant donné deux fonctions continues $p, q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et deux réels $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une et une seule solution $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation (1.6) qui satisfait $f(x_0) = y_0$.

Pour le voir, prenons une primitive P de p, comme auparavant. Donc $P' = p$. (C'est ici que nous utilisons l'hypothèse que p est continue, ce qui nous permet d'invoquer le théorème fondamental de l'analyse pour s'assurer de l'existence d'une primitive P). Calculons,

$$(g\mathrm{e}^P)' = g'\mathrm{e}^P + gP'\mathrm{e}^P = (g' + pg)\mathrm{e}^P = 0.$$

Il vient que $g\mathrm{e}^P = c$ est constant. Par hypothèse, il existe x_0 tel que $g(x_0) = 0$. Mais $g(x_0)\mathrm{e}^{P(x_0)} = c$ et donc $c = 0$, d'où $g(x) = 0$ (parce que $\mathrm{e}^{P(x)} > 0$ pour tout x).

Exemple 1.29. Considérons le problème de Cauchy suivant : trouver f tel que

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x} + x, \qquad f(1) = 0.$$

Dans les notations précédentes, on a $p(x) = -1/x$ et $q(x) = x$. Il faut d'abord résoudre l'équation $P' = p$, puis l'équation $'W = q\mathrm{e}^P$.

On voit que $P(x) = -\log(x)$ est une primitive de p, et $W(x) = x + c$ est une primitive de $q(x)\mathrm{e}^{P(x)} = 1$. La solution générale est donc

$$f(x) = (x + c)x$$

La condition $f(1) = 0$ entraîne que $c = -1$ et donc la solution que nous cherchons est $f(x) = x^2 - x$.

Finalement, nous vérifions que nous avons bel et bien trouvé la solution. Il est clair que $f(1) = 0$, alors que

$$f'(x) = 2x - 1 = \frac{x^2 - x}{x} + x.$$

1.2.2 Équations linéaire d'ordre 2, à coefficients constants

Nous considérons maintenant l'équation

$$f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0 \tag{1.8}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$. Cette équation est dite *linéaire* parce que si f_1, f_2 sont deux solutions et $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ alors $c_1 f_1 + c_2 f_2$ est aussi une solution.

Cette équation linéaire est d'ordre deux et donc on s'attend à ce que la solution générale dépende de deux paramètres ou, plus formellement, que l'ensemble des solutions soit un espace vectoriel de dimension deux. Intuitivement ceci est dû au fait que pour résoudre une équation du deuxième ordre, il faut intégrer deux fois, ce qui fait apparaître deux constantes d'intégration.

Nous expliquons comment résoudre cette équation en partant de l'équation *algébrique* :

$$t^2 + at + b = 0 \tag{1.9}$$

appelée *l'équation caractéristique* de l'équation différentielle (1.8).

Racines réelles distinctes

Supposons d'abord que l'équation caractéristique (1.9) possède deux racines réelles distinctes λ_1, λ_2. Alors

$$t^2 + at + b = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)$$

On peut donc réécrire l'équation différentielle de la façon suivante

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda_1\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda_2\right) f = 0.$$

Nous pouvons maintenant *deviner* une solution. Supposons que $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$. Alors

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda_2\right) f = 0$$

et donc f est forcement une solution de l'équation d'ordre 2. De façon analogue, si on écrit l'équation de la façon équivalente

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda_2\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda_1\right) f = 0$$

on s'aperçoit que $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ est aussi une solution. Donc, par linéarité nous avons trouvé une famille de solutions : pour $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$

est une solution de l'équation différentielle. Comme toujours, vous pouvez facilement vérifier directement que f est une solution de l'équation (1.8).

Pour vérifier que nous avons trouvé toutes les solutions, supposons

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda_1\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda_2\right) f = 0$$

D'ici nous voyons que si f est une solution, alors $g = f' - \lambda_2 f$ est une solution de l'équation d'ordre 1
$$g' - \lambda_1 g = 0$$
Il s'ensuit de nos discussions sur ce genre d'équation, en particulier du théorème 1.28, que la seule possibilité est
$$g(x) = K\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$$
où $K \in \mathbb{R}$. Maintenant, nous savons que
$$f'(x) - \lambda_2 f(x) = K\mathrm{e}^{\lambda_1 x},$$
en appliquant la méthode de la section précédente, on voit facilement
$$f(x) = c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$
pour $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Racine répétée

Ensuite, nous traitons le cas d'un polynôme caractéristique (1.9) qui possède une seule racine :
$$t^2 + at + b = (t - \lambda)^2.$$
Cette fois, l'équation différentielle se ré-écrit comme
$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda\right)^2 f = 0.$$
Comme avant, $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ est bien une solution. Pour deviner une deuxième solution, nous essayons $f(x) = x\mathrm{e}^{\lambda x}$. La motivation ici est que pour ce choix de f, on a
$$f'(x) = \lambda x\mathrm{e}^{\lambda x} + \mathrm{e}^{\lambda x} = \lambda f(x) + \mathrm{e}^{\lambda x}.$$
En d'autres mots, $g(x) = f'(x) - \lambda f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ est précisément une solution de l'équation $g' - \lambda g = 0$. Il s'ensuit que $f(x) = x\mathrm{e}^{\lambda x}$ est bien une solution de l'équation (1.8) d'ordre 2.

Encore une fois, par la linéarité de l'équation, nous avons une famille de solutions, pour tout $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, la fonction
$$f(x) = (c_1 x + c_2)\mathrm{e}^{\lambda x}$$
est une solution de l'équation $f'' + af' + bf = 0$. On peut démontrer que nous avons trouvé toutes les solutions en suivant le même chemin que lorsque les racines du polynôme caractéristique étaient distinctes.

Racines complexes

Finalement, il faut traiter le cas de deux racines complexes du polynôme caractéristique (1.9)
$$t^2 + at + b = (t - \alpha)(t - \bar{\alpha}).$$
Puisque les coefficients sont réels, les racines sont conjuguées. Cette fois, nous avons deux solutions comme avant, mais en utilisant les nombres *complexe*, $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$:
$$f(x) = b_1 \mathrm{e}^{\alpha x} + b_2 \mathrm{e}^{\bar{\alpha} x}$$
Pour revenir aux nombres réels, écrivons $\alpha = \mu + i\omega$ pour $\mu, \omega \in \mathbb{R}$. Constatons que
$$\mathrm{e}^{\alpha x} = \mathrm{e}^{\mu x} \mathrm{e}^{i\omega x} = \mathrm{e}^{\mu x}(\cos(\omega x) + i \sin(\omega x))$$
et de même
$$\mathrm{e}^{\bar{\alpha} x} = \mathrm{e}^{\mu x}(\cos(\omega x) - i \sin(\omega x)).$$
Donc $b_1 = b_2 = 1/2$ nous donne la solution
$$f(x) = \mathrm{e}^{\mu x} \cos(\omega x)$$
et $b_1 = -i/2 = -b_2$ nous donne la solution
$$f(x) = \mathrm{e}^{\mu x} \sin(\omega x).$$
Nous avons donc trouvé deux solutions distinctes et donc une famille : pour tout $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, la fonction
$$f(x) = c_1 \mathrm{e}^{\mu x} \cos(\omega x) + c_2 \mathrm{e}^{\mu x} \sin(\omega x)$$
est une solution de l'équation. On peut démontrer que toute solution est de cette forme juste comme pour les deux autres cas (en considérant une version complexe de notre traitement des équations d'ordre 1).

Exemple 1.30. Un exemple classique est l'équation qui décrit le mouvement d'un pendule lorsque les oscillations sont petites.

Le pendule « simple » est un point P de masse m qui se déplace dans un plan vertical sous l'action de la pesanteur et qui est relié à un point d'attache par une barre rigide de longueur ℓ et de masse négligeable. Les forces impliquées sont la force de tension dans la corde et la force de gravité qui agit sur le masse du pendule.

Dans un système de coordonnées x_1, x_2 dans le plan vertical considéré, tel que l'origine O soit le point d'attache et la force de pesanteur soit dirigée selon l'axe Ox_1, les équations de Newton du mouvement s'écrivent
$$\begin{aligned} m x_1'' &= mg - G\cos\theta, \\ m x_2'' &= -G\sin\theta, \end{aligned}$$

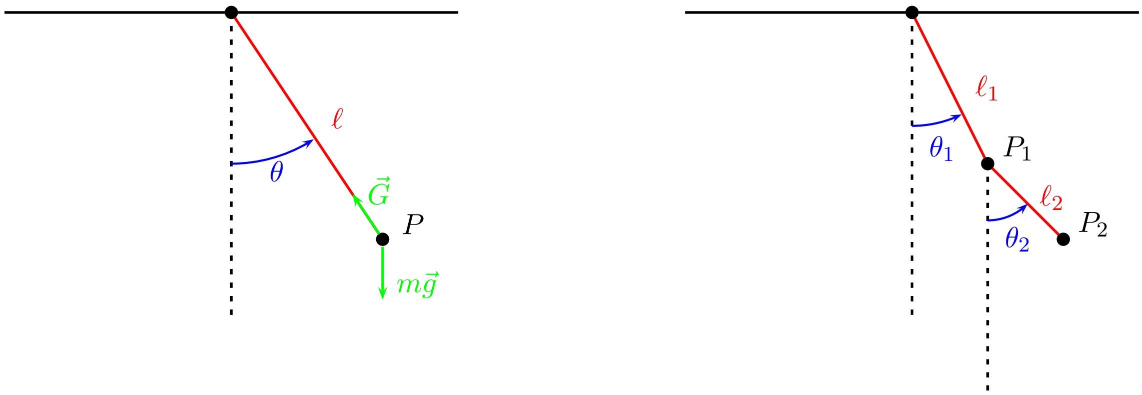


FIGURE 2 – À gauche, un pendule simple. À droite, un pendule double. Essayez d'écrire les équations pour le pendule double !

où G est la norme de la force de liaison exercée par la barre sur le point P et $\theta \in (-\pi, \pi)$ est tel que

$$x_1 = \ell \cos\theta, \; x_2 = \ell \sin\theta.$$

Les équations du mouvement se réduisent alors à l'équation scalaire

$$\theta'' - \frac{g}{l}\sin\theta = 0.$$

Cette équation n'est pas de la forme que nous venons de discuter (elle n'est pas linéaire) et, en fait, il n'est pas possible d'en donner une solution explicite. Par contre, quand les oscillations du pendule sont petites, nous pouvons faire l'approximation que nous avons faite pour trouver la dérivée de la fonction sin, à savoir $\sin\theta \sim \theta$. En remplaçant $\sin\theta$ par θ dans l'équation, nous obtenons l'équation

$$\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0$$

qui est bien de la forme considérée ci-dessus et qui décrit les mouvements de petites amplitudes du pendule.

Le polynôme caractéristique est $t^2 + g/l = 0$ dont les racines sont $\pm i\sqrt{g/l}$. Donc la solution générale est

$$\theta(t) = c_1 \cos(t\sqrt{g/l}) + c_2 \sin(t\sqrt{g/l}),$$

où t est le temps. Si on suppose que $\theta(0) = \theta_0$ et que la vitesse initiale est nulle, on obtient

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(t\sqrt{g/l}).$$

D'ici on voit que la masse oscille entre les angles θ_0 et $-\theta_0$ avec une période de $2\pi\sqrt{l/g}$ (i.e.[1] cette approximation prédit un tel mouvement). On voit alors une relation précise

1. i.e. est l'abréviation de l'expression latine « id est » qui signifie « c'est-à-dire ».

entre la période et la longueur de la corde ; par exemple, si la corde est quatre fois plus longue, la période double.

1.2.3 Équations de Newton

Les deux classes d'équations que nous avons vues ci-dessus sont toutes les deux *linéaires*. Elles sont de la forme $L(f) = q$ où $L(f)$ est une expression linéaire en f et en ses dérivées, ce qui veut dire que pour deux fonctions f, g et des nombres réels $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$L(af + bg) = aL(f) + bL(g).$$

Dans cette section, nous considérons un type d'équation *non linéaire* : les équations de Newton. Il s'agit d'une équation d'ordre deux de la forme

$$u''(t) = F(u(t)),$$

où u est l'inconnue (une fonction dépendant du temps t par exemple) et où F, la force, est une fonction continue donnée. Une telle équation décrit la position $u(t)$ d'un mobile de masse unitaire qui se déplace sous l'action d'une force F qui ne dépend que de la position.

Pour résoudre ce type d'équation, ou tout du moins pour comprendre la nature des solutions, on cherche ce qui s'appelle une *intégrale première*, et qui est décrite dans la proposition suivante.

Proposition 1.31. *Soit u une solution de l'équation*

$$u''(t) = F(u(t)), \tag{1.10}$$

où $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction. Soit V une primitive de F. Alors la quantité

$$E(t) = \frac{1}{2}u'(t)^2 - V(u(t))$$

est constante.

Démonstration. En prenant la dérivée de E par rapport à t, on obtient

$$E'(t) = u''(t)u'(t) - u'(t)V'(u(t)) = u'(t)\left(u''(t) - F(u(t)\right)$$

qui s'annule puisque $u'' = F(u)$. □

Cette quantité possède une interprétation physique : c'est l'énergie du système. Le terme $\frac{1}{2}u'(t)^2$ est l'énergie cinétique, due au mouvement du mobile, et le terme $-V(u(t))$ est l'énergie potentielle résultant de la force F.

Le fait que l'énergie E est constante le long du mouvement du mobile donne deux manières de comprendre le comportement des solutions de l'équation $u'' = F(u)$. Premièrement, il permet de traduire l'équation du deuxième ordre en une équation du premier ordre. Plus précisément, si on considère une solution u de conditions initiales $u(0) = u_0$ et $u'(0) = v_0$, alors l'énergie E est égale à sa valeur initiale $E_0 = \frac{1}{2}v_0^2 - V(u_0)$. Donc

$$u'(t)^2 = 2E_0 + 2V(u(t))$$

Cette équation est du premier ordre et est en principe plus facile à traiter que l'équation de départ.

Deuxièmement, même si cette réduction ne donne pas d'avantage, on peut quand même souvent faire des observations importantes à partir du fait que $E(t) = E_0$ est constant. Une observation très simple de ce genre est la suivante. Soit u une solution de l'équation (1.10) ayant une énergie E_0. Si u désigne la distance d'un mobile à un point fixe, et que le mobile se déplace sous l'influence d'une force F, du fait que l'énergie est constante, nous voyons que $u'(t) = 0$ si et seulement si $V(u(t)) = -E_0$. Donc on connaît exactement les points où le mobile possède une vitesse nulle : il suffit de résoudre $V(\text{point}) = -E_0$ qui est une équation algébrique. De plus, en un tel point, le fait que $u''(t) = V'(u(t))$ nous dit que quand le mobile est instantanément stationnaire (i.e. sa vitesse instantannée est nulle), il se déplace dans la direction dans laquelle V augmente, c'est-à-dire quand l'énergie potentielle (i.e. $-V$) diminue.

Un exemple plus concret de cet usage de l'énergie est fourni par l'équation du pendule :

Exemple 1.32. Nous nous rappelons que le mouvement d'un pendule (sans friction, suspendu par une corde rigide sans masse) est décrit par l'équation

$$\theta''(t) = -\frac{g}{l}\sin(\theta(t))$$

où la corde a longueur l et $\theta(t)$ est l'angle fait par la corde et une droite verticale au temps t.

La force ici est $F(\theta) = -\frac{g}{l}\sin\theta$ qui a comme primitive

$$V(\theta) = \frac{g}{l}\cos\theta.$$

Donc l'énergie est

$$E = \frac{1}{2}\theta'(t)^2 - \frac{g}{l}\cos\theta$$

Si on impose les conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\theta'(0) = 0$ (pendule lâché sans vitesse de l'angle θ_0), on voit que

$$\theta'(t)^2 = \frac{2g}{l}\left(\cos(\theta(t)) - \cos\theta_0\right)$$

Le membre de droite de cette égalité étant positif (il est égal à un carré), on voit que l'angle $\theta(t)$ oscille entre $-\theta_0$ et θ_0. Remarquons qu'il y a aussi deux cas où on peut décrire complètement le mouvement. Si $\theta_0 = 0$, alors $E(t) = \frac{g}{l}$ exige que $\theta(t) = 0$ pour tout t. Si $E(t) = \frac{2g}{l}$ il y a deux possibilités (théoriques) : soit $\theta(t) = \pi$ et le pendule reste immobile tête en haut dans un équilibre instable, soit le pendule oscille entre $\theta(t) = \pi$ et $-\pi$, donc de l'équilibre tête en haut du gauche à l'équilibre tête en haut du droite (ou inversement) mais sans jamais atteindre ses positions.

Exemple 1.33. L'équation de Fisher est l'équation

$$u'' = u - u^3$$

Cette équation est utilisée en biologie pour étudier la propagation d'un gène dans une population ou en physique pour étudier des transitions de phases (changement d'un état solide vers un état liquide ou gazeux). Remarquons qu'il y a trois solutions constantes, $u = 1$, $u = 0$ et $u = -1$. Nous allons voir qu'il existe un mouvement asymptotique qui « relie » l'équilibre -1 à l'équilibre $+1$. Nous cherchons donc une solution qui satisfait $\lim_{t\to\pm\infty} u(t) = \pm 1$ et $\lim_{t\to\pm\infty} u'(t) = 0$.

La « force » ici est $F(u) = u - u^3$ qui a comme primitive

$$V(u) = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}(u^2 - 1)^2.$$

(L'addition de $1/4$ à la primitive rend les calculs suivants plus simple.) Vu les conditions imposées lorsque $t \to \pm\infty$, nous voyons que la valeur constante de l'énergie doit être zéro. L'intégrale première nous donne donc

$$u'^2 = \frac{1}{2}\left(u^2 - 1\right)^2.$$

Dans les intervalles de temps où u' est positif et $-1 \neq u(t) \neq 1$, on a

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}u}{u^2 - 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - t_0).$$

Comme on cherche une solution qui va de -1 à $+1$, elle s'annule nécessairement en au moins un instant et on peut donc supposer que $t_0 = 0$ et $u(0) = 0$. Pour que notre calcul soit correct, nous supposons aussi que $-1 < u(t) < 1$. Dès lors, après avoir effectué l'intégrale, nous obtenons

$$u(t) = \tanh\left(t/\sqrt{2}\right).$$

Finalement, on peut directement vérifier que cette formule donne bien une solution de l'équation de Fisher.

1.3 Problèmes et « paradoxes »

Jusqu'ici nous avons travaillé sans justification, ou en justifiant de manière intuitive. Par exemple, nous avons parlé de l'intégrale d'une fonction f comme étant l'aire entre le graphe de f et l'axe horizontal. Il vous semble peut-être que cette notion est bien définie, mais en fait elle n'est pas suffisamment précise. Pour le voir, considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Rappelez-vous que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme m/n, où m, n sont des entiers. La question que nous posons est *quelle est l'aire entre le graphe de f, l'axe horizontal et les droites verticales $x = 0$ et $x = 1$?*

Constatons d'abord qu'il existe des points où f n'est pas nul. Nous verrons plus tard que $\sqrt{2}$ est irrationnel, pour le moment nous supposons ce fait comme acquis. Donc il y a des points où $f(x) = 1$ et en fait, étant donné deux points quelconques $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, il existe toujours x entre a et b tel que $f(x) = 1$. Pour le voir nous pouvons supposer que $a, b \in \mathbb{Q}$ (sinon $x = a$ ou $x = b$ suffit). Or,

$$x = a + \frac{b-a}{\sqrt{2}} \tag{1.11}$$

n'est pas un nombre rationnel. Pour le voir, nous raisonnons par l'absurde :

Nous nions exactement ce que nous voulons démontrer et de là nous trouvons une absurdité. Donc ce que nous avions nié se doit d'être vrai.

Cette technique de démonstration est très utile, surtout quand il semble que le résultat à démontrer est clair, mais que vous ne voyez pas de preuve directe.

Nous supposons donc que $(a+b)/\sqrt{2}$ est rationnel et nous écrivons à partir de (1.11),

$$\sqrt{2} = \frac{b-a}{x-a}.$$

Si b, a et x étaient tous les trois rationnels, ce serait vrai aussi pour $\sqrt{2}$, parce que la somme, le produit et le quotient de nombres rationnels est encore un nombre rationnel (pouvez-vous le démontrer ?). Vu que $a, b \in \mathbb{Q}$, il faut donc que $x \notin \mathbb{Q}$ et nous avons trouvé $x \in [a, b]$ satisfaisant $f(x) = 1$.

De façon analogue, étant donné deux nombres quelconques $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$, il existe toujours $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = 0$. Autrement dit, entre deux nombres réels on peut toujours trouver un nombre rationnel. En bref, si l'intervalle a une largeur plus grand que 1 il doit exister un entier dedans (et un entier est forcement rationnel !). Pour un intervalle quelconque $[a, b]$, soit n un entier avec $n > 1/(b-a)$. Maintenant que la largeur de l'intervalle $[na, nb]$ est plus grande que 1, celui-ci contient un entier m. Le nombre m/n est un rationnel contenu dans $[a, b]$.

D'ici nous voyons qu'il est effectivement impossible de dessiner le graphe de f. Entre n'importe quel couple de points, la fonction prend les valeurs 0 et 1 un nombre infini de fois. Nous allons maintenant essayer de calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

en coupant le domaine en morceaux. Dans un premier temps, nous pouvons prendre des points

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$$

où tout les points x_i sont rationnels. Avec ce choix, « l'approximation » donne le résultat

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = 1$$

parce que $f(x_{i-1}) = 1$. Donc $I = 1$, n'est pas ?

En revanche, si nous choisissons x_i irrationnels pour $i \neq 0, n$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = (x_1 - x_0)$$

parce que $f(x_{i-1}) = 0$ sauf si $i = 1$, où $f(x_0) = 1$. Lorsque les points x_i « remplissent » la droite entre 0 et 1, la quantité $x_1 - x_0$ tend vers zéro. Il semble alors que $I = 0$.

Mais quelle est la vérité ?

Le problème est que la phrase « l'aire entre le graphe de f et l'axe horizontal » n'est pas bien définie. Il faut en fait renverser le problème. Nous définirons l'intégrale d'une fonction d'une autre manière et puis nous utiliserons cette quantité comme *la bonne définition* de l'aire entre le graphe et l'axe. Nous verrons aussi qu'il y a des fonctions trop pathologiques pour que leur intégrale existe mais, dans les bons cas, nous retrouverons bel bien l'air sous le graphe.

L'idée qui est au cœur de l'analyse, c'est la notion de limite ou si vous voulez la notion de processus infini. Avant d'entamer la longue route vers un traitement complet et rigoureux du calcul différentiel et intégral, nous donnons d'abord quelques avertissements pour vous montrer ce qui peut se passer si on ne prend pas assez de soin lorsqu'on utilise les processus infinis.

Les séries infinies. Vous avez peut-être déjà rencontré la série géométrique

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Pour calculer S, on multiplie les deux cotés de l'égalité par 2 pour obtenir

$$2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2 + S.$$

Alors $S = 2$. Oui ?

Utilisons le même truc pour calculer

$$T = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$$

On obtient

$$2T = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots = T - 1$$

et donc $T = -1$. Est-ce que c'est vrai ? Intuitivement, on sent que le premier calcul est correct alors que le deuxième est faux. Mais pourquoi ? Comment le *démontrer.*

Suites infinies. Soit x un nombre. Considérons la suite $x, x^2, x^3, \ldots$ et demandons quelle est sa limite ? Nous écrivons la limite

$$L = \lim_{n\to\infty} x^n.$$

Si on écrit $n = m + 1$, nous obtenons

$$L = \lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{m\to\infty} x^{m+1} = x \lim_{m\to\infty} x^m = xL,$$

ou encore $L = xL$. Alors, soit $L = 0$, soit $x = 1$. En particulier, il semble que nous avons démontré que pour tout $x \neq 1$,

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

Mais quand $x = 2$, est-ce vrai que la suite $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ converge vers 0 ? Et si $x = -1$, est-ce que c'est vrai que $1, -1, 1, -1, \ldots$ converge vers 0 ? Où se trouve le problème dans notre raisonnement ?

Réarrangement de séries infinies. Supposons que nous voulons calculer la somme des neuf nombres qui se trouvent dans la « matrice » ci-dessous :

$$\begin{array}{rrr|r}
4 & 0 & -6 & -2 \\
12 & 3 & 5 & 20 \\
-3 & 7 & 4 & 8 \\
\hline
13 & 10 & 3 & 26
\end{array}$$

Ici dans la colonne à droite nous avons écrit la somme de chaque ligne ; dans la dernière ligne, nous avons écrit la somme de chaque colonne. Finalement, dans le coin inférieur droit nous avons écrit la somme de la colonne de droite, qui est par ailleurs égale à la somme de la ligne du bas, qui est par ailleurs également égale à la somme des neuf nombres dans la matrice. Nous savons que nous pouvons prendre la somme des nombres dans n'importe quel ordre et que nous obtenons la même somme si nous calculons d'abord la somme de chaque ligne ou d'abord la somme de chaque colonne.

Par contre, cela n'est plus vrai avec un nombre infini de nombres ! Voyez la matrice (infinie) suivante afin de mieux comprendre le problème :

$$\begin{array}{cccccc|l}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 1 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \text{ ou } 1\,?
\end{array}$$

En prenant d'abord la somme des lignes nous calculons que la somme est $1+0+0+\cdots=1$. En revanche, en prenant d'abord la somme des colonnes, nous trouvons que la somme est $0+0+0+\cdots=0$. Alors quelle est la bonne réponse ?

Ce comportement de certaines séries infinies — le fait que la somme dépend de l'ordre dans lequel on prend les termes — est choquant la première fois qu'on y est confronté. Voici un résultat qui sera peut-être encore plus choquant. Vous verrez une démonstration plus tard dans le cours.

Théorème 1.34 (Riemann)**.** *Soit $s \in \mathbb{R}$. Il existe un ré-arrangement $a_0, a_1, a_2, \ldots$ de la suite*

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \ldots$$

tel que la somme des termes, pris en cet ordre, est egale à s :

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots = s.$$

Longueurs et limites. Lorsqu'on calcule une intégrale, on cherche l'aire d'une région bornée par le graphe d'une fonction et trois segments de droites. On trouve d'abord une approximation de la région par des morceaux rectangulaires dont l'aire est facile à calculer et puis on prend la limite lorsque les rectangles deviennent de plus en plus étroits. On peut faire la même chose pour trouver la longueur d'une courbe dans le plan. Nous prenons alors une courbe polygonales par morceaux et qui est une approximation de la courbe donnée. La longueur de la courbe approximante est facile à calculer, puis on prend la limite de cette quantité lorsque la longueur de chaque morceaux tend vers zéro.

Essayons par exemple de calculer la longueur de l'hypoténuse d'un triangle dont les sommets sont en $(0,0)$ $(1,0)$ et $(1,1)$ dans le plan cartésien. Le théorème de Pythagore nous dit bien sûr que cette longueur est $\sqrt{2}$. Supposons par contre que nous ignorons ce résultat et nous voulons calculer la longueur en utilisant une approximation de l'hypoténuse construite à l'aide de petites droites horizontales et verticales disposées en « escalier ». Soit N un entier donné et considérons un « escalier » de N arrêtes horizontales et N droites verticales qui joignent $(0,0)$ à $(1,1)$. Chaque arrête à longueur $1/N$, donc la longueur de l'escalier est $2N/N = 2$. Alors en prenant la limite lorsque N tend vers infini, nous concluons — incorrectement ! — que la longueur de l'hypoténuse est 2. Donc ce genre d'argument n'est pas toujours fiable, quand est-ce qu'il donne la bonne réponse ?

2 Les nombres réels

Nous avons découvert dans le premier chapitre la puissance de l'analyse, quelques belles applications aux équations différentielles, à l'étude du mouvement d'un pendule, etc. Mais nous avons aussi vu qu'il faut être prudent si nous voulons être certain de ne pas faire de grossières erreurs.

Nous nous lançons maintenant dans un traitement tout à fait rigoureux de l'analyse et nous commençons par la notion la plus élémentaire : les nombres. La suite du cours sera basée sur les fondations que nous établissons dans ce chapitre et donc tout sera défini soigneusement. La rigueur nécessaire vous paraîtra peut-être (sans doute) très lourde mais — à la vue des paradoxes décrits ci-dessus — elle est essentielle.

2.1 Axiomatique des nombres réels

Les nombres naturels sont ceux que nous utilisons pour compter. L'ensemble des nombres naturels se note
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$
Il s'agit d'une question de goût de choisir si zéro est un nombre naturel. Dans ce cours, nous adoptons la convention que $0 \in \mathbb{N}$.

On peut additionner deux nombres naturels, la somme est encore un nombre naturel. Mais la soustraction de deux nombres naturels ne donne pas forcément un nombre naturel. Il est donc utile d'introduire une collection plus grandes de nombres : les entiers. L'ensemble de tous les entiers se note
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Le produit de deux entiers est encore un entier, mais pour faire pouvoir définir la division, il faut agrandir encore une fois notre collection de nombres. Un nombre rationnel est un nombre de la forme p/q où $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $q \neq 0$. La collection de tous les nombres rationnels se note
$$\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \neq 0\}.$$
Pour faire de l'arithmétique simple, on pourrait s'arrêter ici. Mais pour résoudre des équations quadratiques, pour faire de la géométrie et beaucoup d'autre choses, les nombres rationnels ne suffisent pas. Le résultat suivant était connu à l'époque de Pythagore.

Lemme 2.1. *Il n'existe pas de rationnel q avec $q^2 = 2$.*

Démonstration. Pour le démontrer, nous raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $q = m/n$ avec m et n entiers et premiers entre eux et tels que $q^2 = 2$. Donc $m^2 = 2n^2$ et de ce fait m^2 est pair. Puisque le carré d'un nombre impair est aussi impair, il s'ensuit que m est pair. Écrivons $m = 2k$ où k est un entier. Il s'ensuit que $m^2 = 4k^2$ et donc $n^2 = 2k^2$. Mais ceci implique que n^2 est pair et donc n est pair également. Nous venons de démontrer que 2 est un diviseur commun de m et n. Mais nous avions pris m et n premiers entre eux, donc il s'agit d'une contradiction. $\square$

Considérons un triangle rectangle dont les deux cotés perpendiculaires sont de longueur un. Par le théorème de Pythagore, son hypoténuse est de longueur $\sqrt{2}$. Donc, pour mesurer la longueur d'une droite, les nombres rationnels ne suffisent pas.

Les nombres réels résolvent ce problème : ils vont nous permettre de « combler » les trous dans $\mathbb{Q}$. Intuitivement, il est bon de visualiser $\mathbb{R}$ comme étant la « droite réelle » ; tout point sur la droite correspond à un nombre réel. Mais comment traiter les nombres réels rigoureusement ?

Nous donnons ci-dessous une liste d'axiomes pour $\mathbb{R}$ et nous *supposons* qu'il existe un tel ensemble « $\mathbb{R}$ » qui satisfait tous ces axiomes. En fait, il est possible de commencer par énoncer des axiomes pour $\mathbb{N}$ et puis de *construire* logiquement $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et finalement $\mathbb{R}$. On peut même démarrer d'une étape encore plus basique, en posant les axiomes des ensembles et en construisant à partir de ces derniers les naturels $\mathbb{N}$. À chaque fois, il faut se baser sur des axiomes pour garder une construction rigoureuse et sans équivoque. Dans ce cours, nous avons décidé de considérer les axiomes de $\mathbb{R}$ comme « évidents » et de nous baser sur ces derniers sans démontrer qu'il est bel et bien possible de « construire » l'ensemble $\mathbb{R}$ de façon rigoureuse et de sorte qu'il satisfasse ces axiomes. Nous renvoyons par exemple au livre de Terence Tao [2] pour une construction axiomatique complète et détaillée des nombres réels basée sur l'axiomatique des ensembles.

Les nombres réels $\mathbb{R}$ vérifient trois axiomes.

1. $\mathbb{R}$ *est un* corps :

- $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif, i.e. pour tous réels $a, b \in \mathbb{R}$, il existe un troisième nombre réel « $a+b$ », la somme de a et b, et la loi « $+$ » satisfait les propriétés suivantes :
  - *(associativité)* pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$,
  $$a + (b + c) = (a + b) + c;$$
  - *(commutativité)* pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,
  $$a + b = b + a;$$
  - *(existence d'un élément neutre)* $0 \in \mathbb{R}$ a la propriété que pour tout $a \in \mathbb{R}$,
  $$a + 0 = a;$$

2. Tao, Terence. Analysis I. Texts and Readings in Mathematics, 37. Hindustan Book Agency, New Delhi, 2006.

– *(existence de l'inverse)* pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que

$$a + b = 0;$$

b est appelé l'inverse de a et est noté $-a$.

- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, .)$ est un groupe commutatif, ce qui signifie que les axiomes ci-dessus sont vérifiés par la loi « . » de multiplication, l'élément neutre étant noté cette fois 1 et l'inverse de a pour . étant noté cette fois a^{-1} ou $1/a$. De plus,
- la multiplication est *distributive* par rapport à l'addition, i.e. pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$a(b + c) = ab + ac.$$

De même, $\mathbb{Q}$ est un corps. Dans ces axiomes, il y a un point très important à retenir : pour que $\mathbb{R}$ soit un groupe multiplicatif, il faut enlever l'origine 0.

Constatons que* 0 *n'a pas d'inverse pour la multiplication !

Nous ne divisons donc jamais par* 0 *!

Nous ne dirons jamais, ni n'écrirons, que* $\frac{x}{0} = \infty$ *!

2. $(\mathbb{R}, \leq)$ *est un* corps totalement ordonné :

- La relation d'ordre $\leq$ a trois propriétés :
  – *(réflexivité)* pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a \leq a$.
  – *(transitivité)* étant donné $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $a \leq b$ et $b \leq c$, on a $a \leq c$.
  – *(antisymétrie)* étant donné $a, b \in \mathbb{R}$, si $a \leq b$ et $b \leq a$ alors $a = b$.
  – *(ordre total)* étant donné $a, b \in \mathbb{R}$, l'une des inégalités est vraie : $a \leq b$ ou $b \leq a$.
- $a \leq b$ implique $a + z \leq b + z$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.
- Si $a, b \geq 0$ alors $ab \geq 0$.

À nouveau, $\mathbb{Q}$ est également un corps totalement ordonné.

Une conséquence importante est que si $a \leq b$ et $c \geq 0$, alors $ac \leq bc$. Est-ce que vous pouvez démontrer ce fait en n'utilisant que les axiomes ci-dessus ?

Par contre, si $a \leq b$ **et** $c \leq 0$ **alors** $ac \geq ac$ **!**

3. $\mathbb{R}$ *satisfait l'axiome de* complétude .

Nous avons constaté que $\mathbb{Q}$ est aussi un corps ordonné et donc jusqu'ici, aucune différence axiomatique ne distingue $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$. C'est dans l'axiome de complétude que se situe la différence essentielle entre $\mathbb{R}$ est $\mathbb{Q}$. Pour énoncer cet axiome, il nous faut introduire un peu de vocabulaire et quelques notations.

Définition 2.2. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble. On dit que A est *majoré* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $a \in A$, $a \leq M$. Un tel M est appelé un *majorant* de A.

De même, A est dit *minoré* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $a \in A$, $a \geq m$. Un tel m est appelé un *minorant* de A.

Constatons qu'un majorant ou un minorant de A n'appartient pas nécessairement à A.

L'axiome de complétude :

- Nous posons que tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$ non-vide et majoré possède un majorant minimal, noté $\sup A \in \mathbb{R}$ et appelé le *supremum* de A. « Être un majorant minimal » signifie que
    1. $\sup A$ est un majorant pour A ;
    2. si M est un majorant pour A alors $\sup A \leq M$.
- De même, *tout ensemble* $A \subset \mathbb{R}$ *non-vide et minoré possède un minorant maximal, noté* $\inf A \in \mathbb{R}$ et appelé l'*infimum* de A.

Pour un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ qui n'est pas majoré, nous écrivons $\sup A = \infty$. De même si A n'est pas minoré, nous écrivons $\inf A = -\infty$.

Constatons que la définition de supremum ne dit pas que $\sup A \in A$***. Il est tout à fait possible qu'un ensemble majoré ne contienne pas son supremum. De même, un ensemble minoré ne contient pas forcement son infimum.***

Quand $\sup A$ appartient à l'ensemble A, on parle du *maximum* de A. De même, quand $\inf A$ appartient à A, on dit qu'il s'agit du minimum de A.

Nous allons voir que cette fois $\mathbb{Q}$ ne satisfait pas l'axiome de complétude. Nous supposons par ailleurs que $\mathbb{R}$ le satisfait puisque notre définition de $\mathbb{R}$ est qu'il s'agit d'un ensemble satisfaisant les trois axiomes mentionnés ci-dessus.

2.2 Application de l'axiome de complétude : existence des racines

Avant de démontrer qu'il existe un nombre réel x satisfaisant $x^2 = 2$, nous commençons par énoncer un résultat préliminaire.

Lemme 2.3 (Propriété d'Archimède)**.** *Pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y < n$.*

Peut-être (sans doute) que cette propriété vous semble évidente. Nous avons d'ailleurs utilisé ce résultat en démontrant ci-dessus qu'il existe un nombre rationnel entre tout couple a, b de nombres réels. Mais le point essentiel ici est de bien comprendre que nous voulons déduire cette propriété des axiomes définissant les nombres réels et en aucun cas accepter ce résultat comme intuitivement évident. En effet, pour être rigoureux, nous devons démarrer sur base des axiomes et tout démontrer à partir de ces axiomes uniquement.

Démonstration. Soit $S = \{n \in \mathbb{N} : n \leq y\}$. Par définition S est majoré par y. Si $S = \varnothing$, alors $0 > y$ et nous avons fini. Si $S \neq \varnothing$, nous prenons $z = \sup S$. Or, $z - 1 < z$ et donc $z-1$ n'est pas un majorant de S. Alors il existe $m \in S$ avec $z-1 < m$. Ceci implique que $m + 1 > z$. Vu que z majore S, il s'ensuit que $m + 1 \notin S$. Donc $m + 1 > y$ et finalement $n = m + 1$ est le nombre naturel cherché. □

Corollaire 2.4. *Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} < y$.*

Démonstration. Par la propriété d'Archimède il exist $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \frac{1}{y}$. Cette inégalité nous donne $y > \frac{1}{n}$. Constatons que pour faire cette manipulation, il faut absolument que $y > 0$ parce qu'on multiplie les deux cotés par y. Si $y < 0$, alors cette multiplication renverserait la direction de l'inégalité. □

Lemme. *Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 2$.*

Démonstration. Soit $A = \{y \in \mathbb{R} : y^2 \leq 2\}$ et $x = \sup A$. Pour démontrer que $x^2 = 2$, nous raisonnons par l'absurde. Commençons par donner l'idée de la démonstration.

Si $x^2 < 2$, on peut trouver $\hat{x}$ un peu plus grand que x tel que $\hat{x}^2 < 2$, ce qui contredit le fait que x majore A.

Si $x^2 > 2$, on peut trouver $\hat{x}$ un peu plus petit que x tel que $\hat{x}^2 > 2$. Or, x et le majorant *minimal* donc $\hat{x}$ n'est pas un majorant. Donc il existe $y \in A$ avec $y > \hat{x}$, et donc $y^2 > \hat{x}^2 > 2$. Mais ceci contredit le fait que $y \in A$.

Passons à la preuve détaillée. Supposons que $x^2 < 2$. Soit $x_n = x + \frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}_0$. Calculons $x_n^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \leq x^2 + \frac{2x+1}{n}$. Comme par hypothèse $2 - x^2 > 0$ et que par ailleurs $2x + 1 > 0$ — parce que $0 \in A$ et donc $x \geq 0$ — leur quotient est strictement positif et donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} < \frac{2-x^2}{2x+1}$. Pour ce choix de n, on a $x_n^2 < 2$. Donc $x_n \in A$ et $x_n > x$ ce qui est une contradiction.

Nous raisonnons de façon similaire pour trouver une contradiction en partant de l'hypothèse $x^2 > 2$. Soit $x_n = x - \frac{1}{n}$. En raisonnant comme ci-dessus, nous voyons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n^2 > 2$ (est-ce que vous pouvez fournir les détails ?). Or $x_n < x$ et donc x_n ne peut pas être un majorant de A. Alors il existe $y \in A$ avec $x_n < y$. Mais ceci implique que $x_n^2 < y^2$. Autrement dit $y^2 > 2$, qui contredit le fait que $y \in A$.

On a donc vu que x^2 n'est ni supérieur ni inférieur à 2. La seule possibilité restante est que $x^2 = 2$, car l'ordre des réels est total. □

Nous écrivons $\sqrt{2}$ ou $2^{1/2}$ pour décrire le nombre réel $x > 0$ tel que $x^2 = 2$. Généralisons tout ceci à la construction des puissance rationnelles des nombres. Pour un entier positif n, nous définissons la n^{e} racine de $x \geq 0$, noté $x^{1/n}$, par

$$x^{1/n} = \sup\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0,\ y^n \leq x\}.$$

Nous pouvons démontrer que $(x^{1/n})^n = x$ en suivant l'argumentation utilisée dans la preuve du lemme précédent.

Pour un rationnel positif $q = m/n$ sous forme irréductible, et $x \geq 0$, nous définissons l'exponentielle rationnelle x^q par

$$x^q = \left(x^{1/n}\right)^m.$$

Les règles $x^p x^q = x^{p+q}$ et $(x^p)^q = x^{pq}$ s'étendent des exposants entiers aux exposants rationnels. Constatons que nous n'avons pas encore défini x^y pour $y \in \mathbb{R}$ quelconque. Une manière de le faire est reprise dans les énoncés des exercices. Nous en donnerons une autre plus tard.

2.3 Densité des rationnels

On a vu que la différence entre les réels $\mathbb{R}$ et les rationnels $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est l'existence des supremums et infimums dans $\mathbb{R}$, c'est à dire la complétude de $\mathbb{R}$. Une question naturelle est de se demander combien de points en plus avons-nous « ajouté » à $\mathbb{Q}$ pour obtenir $\mathbb{R}$. Nous avons déjà vu une justification du résultat suivant, mais nous pouvons maintenant donner une démonstration rigoureuse.

> **Lemme 2.5.** *Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$. Alors il existe $q \in \mathbb{Q}$ avec $x < q < y$.*

Démonstration. Considérons d'abord le cas particulier où $y - x > 1$. Par la propriété d'Archimède il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > x$. Soit $n \in \mathbb{Z}$ l'entier le plus petit tel que $n > x$. Comme $n - 1 \leq x$, on a $n \leq x + 1 < y$. Autrement dit, $x < n < y$ et nous pouvons prendre $q = n$.

Si x, y sont quelconques et $x < y$, la propriété d'Archimède implique l'existence de $m \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{y-x} < m$ puisque $y - x > 0$. Dès lors $my - mx > 1$. Nous déduisons du cas particulier traité en premier lieu qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $mx < n < my$. Autrement dit, $x < \frac{n}{m} < y$ et nous pouvons prendre $q = \frac{n}{m}$. □

Ce résultat dit qu'étant donné un nombre réel x et une précision abritraire $\epsilon > 0$ (mais non-nulle), il existe une approximation rationnelle $q \in \mathbb{Q}$ de x telle que $-\epsilon < q - x < \epsilon$. Il convient de prendre simplement un rationnel q tel que $x < q < x + \epsilon$.

De ce point de vue, on n'a pas ajouté « trop » de points à $\mathbb{Q}$ pour obtenir un corps complet. On verra plus tard par contre, que la « taille » de $\mathbb{R}$ est de loin plus grande que celle de $\mathbb{Q}$. Bien que les deux ensembles soient infinis, le nombre d'éléments de $\mathbb{R}$ est strictement supérieur a celui de $\mathbb{Q}$ (dans un sens que nous préciserons plus tard).

2.4 L'inégalité triangulaire

Pour $x \in \mathbb{R}$, nous écrivons $|x|$ pour décrire la valeur absolue de x :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Géométriquement, $|x|$ fournit la distance de x à 0 sur la droite réelle.

Lemme. *Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $|a + b| \leq |a| + |b|$.*

Démonstration. Du point de vu géométrique, ce résultat est clair à partir d'un dessin de la droite réelle. Pour une démonstration analytique rigoureuse nous procédons comme suit. Si $a, b \geq 0$, alors les deux cotés sont égaux. Si $a, b \leq 0$ alors les deux cotés sont égaux également. Dans le cas $a \geq 0 \geq b$, il faut démontrer que

$$-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

L'inégalité dans le membre de gauche découle du fait que $b = -|b|$ et $a \geq 0$. L'inégalité dans le membre de droite découle du fait que $a = |a|$ et $b \leq 0$. Le dernier cas se démontre de façon tout à fait similaire. □

Corollaire 2.6. *Pour tout $c, d \in \mathbb{R}$, $|c - d| \geq |c| - |d|$*

Démonstration. Soit $a = c - d$, $b = d$. Donc $|c| \leq |c - d| + |d|$. □

Lemme 2.7. *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| = |x||y|$.*

C'est à vous de donner une démonstration de ce lemme.

2.5 D'autres corps

Définition 2.8. Un corps est un ensemble K muni d'une addition $+$ et d'une multiplication $\times$ tels que les axiomes suivants sont satisfaits :

- $(K, +)$ et un groupe commutatif :
  (i) $+$ est associative et commutative ;
  (ii) il existe un élément neutre $0 \in K$ pour $+$ qui a la propriété que $p + 0 = p$ pour tout $p \in K$;
  (iii) pour tout $p \in K$, il existe $q \in K$ tel que $p + q = 0$; q est noté $-p$, et est appelé l'inverse pour l'addition de p.
- $(K \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe commutatif.
- La multiplication est distributive par rapport à l'addition : pour tout $p, q, r \in K$, $p \times (q + r) = p \times q + p \times r$.

La notion de corps est parmi les définitions les plus importantes de l'algèbre. Dans ce cours, nous nous concentrons sur l'analyse sur le corps des réels et donc nous donnons juste un autre exemple de corps, le corps des nombres complexes, mais vous en rencontrerez bien d'autres.

Les nombres complexes

L'algèbre de $\mathbb{R}$ donne une structure d'un corps à la droite. On peut aussi donner une structure de corps au plan, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Pour définir $+$ il faut choisir une origine $0 \in \mathbb{R}^2$. Étant donné deux points $z, w \in \mathbb{R}^2$, nous définissions la somme $z + w \in \mathbb{R}^2$ en commençant en 0, en suivant d'abord le vecteur z et puis w.

L'origine est l'élément neutre pour $(\mathbb{R}^2, +)$. Étant donné x, $-x$ est simplement le vecteur de la même longueur que x dont la direction est opposée.

En composantes, si $z = (x_1, y_1)$ et $w = (x_2, y_2)$ alors $z + w = (x_1 + x_2, y_1 + y_1)$ et $-z = (-x_1, -y_1)$.

Pour définir une multiplication $\times$, il faut choisir de plus une demi-droite qui passe par l'origine. Traditionnellement, on choisit l'axe où la deuxième composante est nulle et la première est positive. Étant donné $z, w \in \mathbb{R}^2$, nous écrivons θ, ϕ pour décrire les angles entre z, w et la demi-droite.

Nous définissons le produit $z \times w =: zw$ comme le vecteur qui a longueur $|z||w|$ (où $|z|$ est la longueur de z) et qui forme l'angle $\phi + \theta$ avec l'axe.

Constatons que pour le vecteur nul 0 il n'est pas possible de définir un tel angle. Nous supposons alors que $0 \times z = 0$ pour tout z.

En composantes, si $z = (x, y)$ nous définissons la longueur $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et l'angle θ tel que $\tan\theta = y/x$. En utilisant un peu de trigonométrie, on voit que

$$(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

Le point sur la demi-droite à distance 1 de l'origine est l'élément neutre pour $\times$. Avec notre choix de demi-droite, cet élément est $(1, 0)$ en termes de coordonnées cartésiennes.

Soit $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. La distance $|x|$ de l'origine à x n'est pas nulle. Soit θ l'angle entre l'axe et θ. L'inverse de x est l'élément de $\mathbb{R}^2$ à distance $|x|^{-1}$ de l'origine et formant l'angle $2\pi - \theta$ avec l'axe.

On peut maintenant vérifier que la multiplication est distributive pour l'addition.

Avec cette structure, $\mathbb{R}^2$ devient un corps que nous écrivons $\mathbb{C}$.

Constatons qu'en fait, les nombres réels $\mathbb{R}$ sont un sous-corps de $\mathbb{C}$. Étant donné $p \in \mathbb{R}$, nous le considérons comme l'élément $(p, 0) \in \mathbb{C}$. Remarquons que $(p_1, 0) + (p_2, 0) = (p_1 + p_2, 0)$ et que $(p_1, 0) \times (p_2, 0) = (p_1p_2, 0)$ donc $\mathbb{R}$ est bien un sous-corps.

Le corps $\mathbb{C}$ a une propriété très importante qui n'est pas vraie dans $\mathbb{R}$. Écrivons $-1 = (-1, 0)$; ce point forme l'angle π avec la demi-droite de référence. La propriété importante est qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = -1$. Géométriquement, nous prenons $z \in \mathbb{C}$ qui est à distance 1 de l'origine et formant un angle $\pi/2$ avec l'axe de référence. Par définition de $\times$, z^2 est aussi à distance 1 de l'origine et l'angle a doublé, donc il vaut π. Nous avons donc bien obtenu $z^2 = (-1, 0)$.

Notons i cette solution de l'équation $z^2 = -1$. En termes de coordonnées cartésiennes, $i = (0, 1)$. Constatons que $-i$ est également une solution de l'équation. Nous pouvons maintenant écrire tout élément de $\mathbb{C}$ comme la somme d'un multiple réel de $1 = (1, 0)$ et de $i = (0, 1)$. Si $z = x + iy$ pour $x, y \in \mathbb{R}$, x est appelé *la partie réelle de z* et y *la partie imaginaire*. Si $y = 0$ alors z est simplement un nombre *réel* ; si $x = 0$ alors z est appelé *un nombre imaginaire*. Malgré cette nomenclature, il n'y rien d'imaginaire dans les nombres imaginaires !

3 Suites

Dans notre discussion intuitive des concepts de dérivée et d'intégrale, nous avons utilisé souvent l'idée qu'une quantité peut tendre vers une valeur « limite » quand un paramètre tend vers zéro ou vers l'infini. Nous avons présenté la dérivée comme la limite des variations moyennes, et l'intégrale comme la limite de la somme des aires de rectangles dont le nombre tend vers l'infini.

Nous allons à présent formaliser rigoureusement cette notion de limite (ou de « convergence »).

Toute la suite du cours se base sur les définitions et les concepts que nous introduisons dans cette section, donc maitrisez-les bien !

Définition 3.1. Une suite dans $\mathbb{R}$ est une liste infinie $x_0, x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ indexée par les entiers positifs. Chaque élément dans cette liste est un *terme* de la suite.

Une suite se note $x_0, x_1, x_2, \ldots$, ou (x_n) ou $(x_n)_n$ ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 3.2.

1. $(n) = 0, 1, 2, \ldots$
2. $((-1)^n) = 1, -1, 1, -1, \ldots$
3. $\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right) = -1, 0, \frac{3}{5}, \frac{8}{10}, \frac{15}{17}, \ldots$

3.1 Convergence et divergence : définitions

Intuitivement une suite (x_n) converge vers a si les termes de (x_n) approche a. Par exemple nous sommes tous d'accord que $(\frac{1}{n})$ converge vers 0. Voilà la manière rigoureuse de traduire cette phrase.

Définition 3.3. Une suite $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ converge vers $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout entier $n \geq N$, $|x_n - a| < \varepsilon$.

Dans ce cas, nous écrivons $x_n \to a$ lorsque $n \to \infty$ ou simplement $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Cette définition affirme que la suite (x_n) converge vers a si, étant donné $\varepsilon > 0$ quelconque, après un certain indice N (qui dépendra généralement de ε), tous les termes de la suite $x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots$ se trouvent entre $a - \varepsilon$ et $a + \varepsilon$. C'est à dire qu'après le N^{e} indice, tous les termes de la suite se trouvent à une distance de a inférieure à ε.

N peut — et en général doit — dépendre de ε.

Plus ε est petit, plus N devient grand.

Exemple 3.4.

1. $\frac{1}{n} \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
   Nous donnons une démonstration basée sur la propriété d'Archimède : si $\varepsilon > 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{\varepsilon} < N$ et donc $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Pour tout $n \geq N$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$.
2. $x_n = \frac{n}{n+1}$.
   Regardons les premiers termes : $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$.
   Il semble donc que la suite converge vers 1. Voilà une démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $|1 - x_n| = \frac{1}{n+1}$, si nous prenons N tel que $\frac{1}{N+1} < \varepsilon$, alors
   $$|x_n - 1| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} < \varepsilon$$
   dès que $n \geq N$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrons qu'il existe une suite $(q_n) \subset \mathbb{Q}$ qui converge vers x. Nous avons déjà vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, il existe un rationnel q_n avec $x < q_n < x + \frac{1}{n}$. Avec ce choix de q_n, nous avons que $|q_n - x| < \frac{1}{n}$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, prenons N tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Si $n \geq N$, alors
   $$|q_n - x| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$
   et donc $q_n \to x$ lorsque $n \to \infty$.

Intuitivement, il semble que si une suite converge alors sa limite est unique. Ceci nécessite néanmoins une preuve.

Lemme 3.5. *Soit $(x_n) \subset \mathbb{R}$. Supposons que $x_n \to a$ et $x_n \to b$ lorsque $n \to \infty$. Alors $a = b$.*

Démonstration. Nous raisonnons par l'absurde, en supposant que $a \neq b$.

Soit $\varepsilon = |a-b|/2 > 0$. La convergence de x_n vers a implique qu'il existe N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$, $|x_n - a| < \varepsilon$. De même, la convergence de x_n vers b entraîne qu'il existe N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$, $|x_n - b| < \varepsilon$.

Prenons maintenant $N = \max\{N_1, N_2\}$. Par l'inégalité triangulaire,

$$|a-b| \leq |a - x_N| + |x_N - b|.$$

Mais vu notre choix de N, les deux membres du coté droit de l'inégalité sont tous les deux strictement inférieurs à $|a-b|/2$. Donc,

$$|a-b| < \frac{1}{2}|a-b| + \frac{1}{2}|a-b| = |a-b|$$

Ceci n'est pas possible, donc l'hypothèse $\varepsilon > 0$ était erronée et en fait $a = b$. $\square$

La même technique de démonstration vous servira pour le prochain résultat dont nous laissons la preuve en guise de très bon exercice.

Lemme 3.6. *Soient (x_n) et (y_n) deux suites convergentes telles que $x_n \leq y_n$ pour tout n. Alors,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Nous pouvons aussi définir la convergence vers l'infini et moins l'infini.

Définition 3.7. Une suite tend vers l'infini si et seulement si pour tout $K > 0$, il existe N tel que si $n \geq N$ alors $x_n > K$. Dans ce cas nous écrivons que $x_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$ ou simplement $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Une suite tend vers moins l'infini si et seulement si pour tout $K > 0$ il existe N tel que si $n \geq N$ alors $x_n < -K$. Dans ce cas nous écrivons que $x_n \to -\infty$ lorsque $n \to \infty$ ou simplement $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Définition 3.8. Une suite qui ne converge pas vers un nombre réel est dite *divergente.*

Une suite qui tend vers l'infini est donc divergente. Attention, cette convention n'est pas suivie par tous les auteurs.

Exemple 3.9.

1. La suite $x_n = n$ tend vers l'infini. Pour le voir, étant donné $K > 0$, nous prenons $N > K$. Si $n \geq N$ alors forcement $x_n = n$ est plus grand que K.

2. La suite $x_n = (-1)^n$ diverge. Pour le démontrer, nous commençons par nier la phrase « x_n converge » : pour tout $a \in \mathbb{R}$, il faut trouver $\varepsilon > 0$ tel que, quelque soit N, il existe $n \geq N$ pour lequel $|x_n - a| \geq \varepsilon$.
   Pour $a = 1$, prenons $\varepsilon = 1$. Soit N. On cherche $n \geq N$ avec $|x_n - 1| \geq \varepsilon$. Il suffit de prendre n impair ! Alors $|x_n - 1| = |-1 - 1| = 2$.
   Pour $a = -1$, prenons $\varepsilon = 1$. À nouveau pour tout indice pair, nous avons $|x_n+1| = 2$ et nous pouvons raisonner comme précédemment.
   Pour $a \neq 1$, prenons $\varepsilon = \min\{|a-1|, |a+1|\}$. Étant donné $n \in \mathbb{N}$, soit $x_n = 1$ et dans ce cas $|x_n - a| = |1-a| = |a-1|$, soit $x_n = -1$ et alors $|x_n - a| = |-1-a| = |1+a|$. Dans les deux cas, $|x_n - a| \geq \varepsilon$.

3.2 Convergence : techniques

Démontrer la convergence ou la divergence d'une suite directement à partir de la définition peut s'avérer quelque peu pénible. Dans cette section nous donnons des techniques qui permettent de démontrer la convergence ou la divergence d'une manière un peu plus élégante.

Nous commençons avec un résultat assez simple qui jouera cependant un rôle important dans la suite.

> **Lemme 3.10.** *Si (x_n) est une suite convergente, alors (x_n) est bornée, c'est à dire qu'il existe K tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq K$.*

Démonstration. Soit $a = \lim x_n$. Prenons $\varepsilon = 1$ dans la définition de la convergence. Il existe donc N tel que pour tout $n \geq N$, $|x_n - a| < 1$. Donc pour tout $n \geq N$,

$$|x_n| = |x_n - a + a| \leq |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Alors (x_n) est borné après le N^{e} terme. Mais ça ne laisse plus qu'un nombre fini de termes à traiter. Soit

$$K = \max\{|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_{N-1}|, 1 + |a|\}.$$

Alors, $|x_n| \leq K$ pour toute valeur de $n \in \mathbb{N}$. □

Notre prochain résultat établit le fait que les opérations arithmétiques agissent sur les suites convergentes de la manière attendue. On dira que l'addition et le produit sont stables pour la convergence des suites.

> **Théorème 3.11** (Règles de calcul des limites)**.** *Soit (x_n), (y_n) deux suites convergentes respectivement vers a et b. Alors,*
>
> *1. $(x_n + y_n)$ est convergente et sa limite vaut $a + b$.*

2. *$(x_n y_n)$ est convergente et sa limite vaut ab.*
3. *Si $b \neq 0$, alors il existe M tel que pour tout $n \geq M$, $y_n \neq 0$ et la suite $(x_n/y_n)_{n\geq M}$ est bien définie. Cette suite est convergente et sa limite vaut a/b.*

Démonstration.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Par la définition de convergence de (x_n), il existe N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$, $|x_n - a| < \varepsilon/2$. De même, il existe N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$, $|y_n - b| < \varepsilon/2$.
   Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$. Pour $n \geq N$, on a
   $$|x_n + y_n - (a+b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon.$$
2. Par le lemme 3.10, une suite convergente est forcement bornée. Donc il existe $K > 0$ tel que $|x_n| \leq K$ et il s'ensuit que
   $$\begin{aligned}|x_n y_n - ab| &= |x_n(y_n - b) + (x_n - a)b| \\ &\leq |x_n||y_n - b| + |x_n - a||b| \\ &\leq K|y_n - b| + |b||x_n - a|\end{aligned}$$
   Fixons $\varepsilon > 0$. Puisque $y_n \to b$, il existe N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$, $|y_n - b| < \varepsilon/2K$. Par ailleurs, puisque $x_n \to a$, il existe N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$, $|x_n - a| < \varepsilon/2(|b|+1)$. Il faut effectivement ajouter le 1 ici pour prendre soin du cas où $b = 0$. Prenons finalement $N = \max\{N_1, N_2\}$. Pour tout $n \geq N$, on a
   $$|x_n y_n - ab| \leq K|y_n - b| + |b||x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
3. Si la suite $(1/y_n)$ converge vers $1/b$, la convergence de la suite (x_n/y_n) découle de l'assertion 2.
   Soit $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$. Il existe M tel que pour tout $n \geq M$, $|y_n - b| < \frac{|b|}{2}$. Donc
   $$\begin{aligned}|y_n| &\geq |b| - |b - y_n|, \\ &> |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} 0.\end{aligned}$$
   où la première inégalité provient de l'inégalité triangulaire, et la deuxième se déduit en remplaçant $-|b - y_n|$ par sa borne inférieure $-|b|/2$. La suite $(1/y_n)_{n\geq M}$ est donc bien définie. Pour prouver la convergence vers $1/b$, constatons que pour tout $n \geq M$.
   $$\begin{aligned}\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| &= \left|\frac{b - y_n}{b y_n}\right| \\ &= \frac{|b - y_n|}{|b||y_n|} \\ &\leq \frac{2}{|b|^2}|b - y_n|,\end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle du choix de M. Maintenant, la convergence de y_n implique que pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $N \geq M$ tel que pour tout $n \geq N$, $|y_n - y| < \frac{|b|^2}{2}\varepsilon$. Dès lors, pour $n \geq N$, nous obtenons

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| \leq \frac{2}{|b|^2}|b - y_n| < \varepsilon.$$

□

Exemple 3.12.

1. Calculons la limite de $\frac{1}{n^2}$ lorsque $n \to \infty$.
   Nous avons vu que $\frac{1}{n} \to 0$ donc $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0$.
2. Calculons la limite de $\frac{n-1}{2n+3}$ lorsque $n \to \infty$.
   Après division par n du numérateur et du dénominateur, nous obtenons $\frac{n-1}{2n+3} = \frac{1-1/n}{2+3/n}$. Puisque $1/n \to 0$, la numérateur converge vers 1 et le dénominateur vers 2, donc la suite elle-même converge vers $1/2$.
3. Soient $a_0, \dots a_k \in \mathbb{R}$ et $b_0, \dots b_k \in \mathbb{R}$ avec $b_k \neq 0$. Soit

   $$x_n = \frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_0}$$

   Alors $x_n \to a_k/b_k$. Pour le voir, nous divisons le numérateur et le dénominateur par n^k pour obtenir

   $$\frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_0} = \frac{a_k + a_{k-1}n^{-1} + \cdots + a_0 n^{-k}}{b_k + b_{k-1}n^{-1} + \cdots + b_0 n^{-k}}.$$

   À présent, chaque terme de la forme cn^{-p} pour $p > 0$ tend vers zéro. Donc le numérateur tend vers a_k alors que le dénominateur tend vers b_k, qui est non-nulle par hypothèse. Donc $x_n \to a_k/b_k$ par les règles de calcul.

Lemme 3.13. *Si $x_n \to a$ lorsque $n \to \infty$ alors $|x_n| \to |a|$.*

Démonstration. Si $a > 0$ alors pour tout n suffisamment grand $x_n > 0$. Pour le voir, fixons $\varepsilon = a/2$. La définition de convergence nous donne N tel que pour tout $n \geq N$, $|x_n - a| < a/2$. Pour $n \geq N$, nous avons donc que $x_n - a > -a/2$ ce qui entraine que $x_n > a/2 > 0$.

Donc pour tout $n \geq N$, $|x_n| = x_n$. En oubliant un nombre fini de termes, les suite $(x_n)_{n \geq N}$ et $(|x_n|)_{n \geq N}$ sont égales et donc ont la même limite, c'est à dire a.

Si $a < 0$ alors pour tout n suffisamment grand $x_n < 0$. (Est-ce que vous pouvez donner la justification vous-même ?) Donc en oubliant un nombre fini de termes, les suites $(-x_n)$ et $(|x_n|)$ sont égales et donc ont la même limite, c'est à dire $-a$.

Si $a = 0$, $||x_n| - |a|| = |x_n - 0|$. Étant donné $\varepsilon > 0$, l'indice N qui marche dans la définition de la convergence de (x_n) marche aussi pour $(|x_n|)$. □

Théorème 3.14 (Test de comparaison ou « Théorème du sandwich »)**.** *Soient* (a_n)*,* (b_n) *deux suites convergentes ayant la même limite* ℓ*. Si* (x_n) *est une suite satisfaisant*

$$a_n \leq x_n \leq b_n$$

pour tout $n \geq N_0$*, alors* (x_n) *converge aussi et sa limite vaut* ℓ*.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$, $|a_n - \ell| < \varepsilon$. Il existe N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$, $|b_n - \ell| < \varepsilon$. Donc pour tout $n \geq N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$,

$$-\varepsilon < a_n - \ell \leq x_n - \ell \leq b_n - \ell < \varepsilon,$$

i.e. pour tout $n \geq N$, $|x_n - \ell| < \varepsilon$. □

Exemple 3.15.

1. $x_n = (-1)^n/n^2$.
   Nous prenons $a_n = -1/n^2$, $b_n = 1/n^2$. Évidement, $a_n \leq x_n \leq b_n$ et les deux suites qui encadrent x_n tendent vers zéro. Donc $x_n \to 0$.
2. Supposons que $|x_n| \to 0$. Vu que $-|x_n| \leq x_n \leq |x_n|$ et que les deux suites $(|x_n|)$ et $(-|x_n|)$ tendent vers zéro, on obtient $x_n \to 0$.
   Il aurait été très facile de démontrer directement ceci à partir de la définition. Est-ce que vous pouvez le faire ?

Corollaire 3.16. *Supposons que* (y_n) *est une suite bornée et que* $z_n \to 0$*. Alors le produit* $y_n z_n$ *converge vers zéro.*

Démonstration. Par hypothèse, il existe K tel que $|y_n| < K$ pour tout n. Dès lors

$$-K|z_n| \leq |y_n z_n| \leq K|z_n|.$$

Puisque $z_n \to 0$, nous avons $|z_n| \to 0$ et donc nous pouvons appliquer le test de comparaison. Il s'ensuit que $|y_n z_n| \to 0$, et finalement $y_n z_n \to 0$. □

Proposition 3.17 (Règle de l'exponentielle)**.** *Soit* (a_n) *une suite à termes positifs qui converge vers* 0*. Soit* $p > 0$*. Alors la suite* (a_n^p) *converge aussi vers* 0*.*

Remarquons que nous n'avons pas encore *rigoureusement* défini a^p pour $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Démonstration. Étant donné $\varepsilon > 0$, soit $\varepsilon' = \varepsilon^{1/p} > 0$. Alors il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $|a_n| < \varepsilon'$. Puisque $a_n \geq 0$, en fait $0 \leq a_n < \varepsilon^{1/p}$. Donc $0 \leq a_n^p < \varepsilon$. □

Nous aurons besoin dans la suite de la formule du binôme de Newton.

Théorème 3.18 (Formule du binôme de Newton)**.** *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$. *Alors*

$$(1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j,$$

où

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}.$$

Rappelons que $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$ et par convention, $0! = 1$. Nous démontrerons la formule par *induction*, i.e. par un *raisonnement par récurrence.*

L'induction sert à démontrer un résultat de la forme « pour tout $n \in \mathbb{N}$***,*** $P(n)$ ***est vrai ». Le schéma standard consiste à***

1. ***démontrer que*** $P(0)$ ***est vrai. C'est le pas initial.***
2. ***démontrer que si*** $P(n)$ ***est vrai, alors*** $P(n+1)$ ***est vrai. C'est le pas d'induction.***

Parfois, il est utile de remplacer le pas d'induction par :

2'. ***démontrer que si*** $P(j)$ ***est vrai pour*** $j = 0, \ldots, n$***, alors*** $P(n+1)$ ***est vrai.***

Démonstration de la formule du binôme. Le cas $n = 0$ est trivial puisque $\binom{0}{0} = 1$ alors que $(1+x)^0 = 1$. Si vous vous inquiétez un peu avec $0!/0!$, constatez que le cas $n = 1$ est aussi simple puisque $\binom{1}{0} = 1 = \binom{1}{1}$ alors que $(1+x)^1 = 1 + x$.

Pour démontrer l'étape d'induction, observons que

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\
&= (1+x) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} \right) x^j + x^{n+1}.
\end{aligned}$$

Il faut donc vérifier que
$$\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} = \binom{n+1}{j}.$$
Ceci découle d'un petit calcul :
$$\begin{aligned}
\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} &= \frac{n!}{j!(n-j)!} + \frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!} \\
&= \frac{n!(n-j+1) + n!j}{j!(n-j+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{j!(n-j+1)!} \\
&= \binom{n+1}{j}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.19. *Les suites suivantes convergent vers zéro.*

1. $(1/n^p)$ *pour* $p > 0$ *;*
2. (c^n) *pour* $|c| < 1$ *;*
3. $(n^p c^n)$ *pour* $p \in \mathbb{R}$ *et* $|c| < 1$ *;*
4. $(c^n/n!)$ *pour* $c \in \mathbb{R}$ *;*
5. $(n^p/n!)$ *pour* $p \in \mathbb{R}$.

Remarquons que nous n'avons toujours pas défini rigoureusement a^p pour $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Démonstration.

1. $(1/n)$ converge vers zéro. Le résultat découle donc de la règle de l'exponentielle.
2. Soit $x_n = c^n$. Il suffit de démontrer que $|x_n| \to 0$ et donc il suffit de considérer $0 \le c < 1$. Écrivons $c = 1/(1+a)$ pour $a > 0$. Or,
$$(1+a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \cdots + a^n \ge na.$$
L'égalité se déduit de la formule du binôme et l'inégalité s'ensuit parce que a est positif et donc on a enlevé des termes positifs. Donc
$$0 \le x_n = \frac{1}{(1+a)^n} \le \frac{1}{an}.$$
Les deux cotés tendent vers zéro lorsque $n \to \infty$, si bien que $x_n \to 0$ par le théorème du sandwich.

3. Ici aussi le cas $0 \leq c < 1$ suffit. Nous supposons d'abord $p = 1$. Soit $c = 1/(1+a)$ pour $a > 0$. Par la formule du binôme, pour $n \geq 2$,
$$(1+a)^n \geq 1 + na + \frac{1}{2}n(n-1)a^2 \geq \frac{1}{2}n(n-1)a^2.$$
À nouveau, vu que a est positif, on a oublié des termes positifs dans la formule du binôme pour $(1+a)^n$. Donc
$$0 \leq nc^n = \frac{n}{(1+a)^n} \leq \frac{2n}{n(n-1)a^2} = \frac{2}{(n-1)a^2}.$$
Les deux cotés tendent vers zéro donc $nc^n \to 0$ aussi.
Pour $p > 0$, soit $d = c^{1/p}$ (nous supposons encore que $c > 0$). Alors $nd^n \to 0$ par l'étape précédente. Donc, par la règle de l'exponentielle, $n^p c^n = (nd^n)^p$ tend vers zéro aussi.
Pour $p < 0$, $n^p < 1$ et donc $0 < n^p|c|^n < |c|^n$, si bien que le résultat découle du théorème du sandwich et du cas précédent.
4. Encore une fois, il suffit de traiter le cas $c \geq 0$. Par la propriété d'Archimède, il existe un entier $m > c$. Alors pour $n \geq m$,
$$\begin{aligned} \frac{c^n}{n!} &= \left(\frac{c}{1}\right)\left(\frac{c}{2}\right)\cdots\left(\frac{c}{m-1}\right)\left(\frac{c}{m}\right)\cdots\left(\frac{c}{n-1}\right)\left(\frac{c}{n}\right) \\ &\leq \left(\frac{c}{1}\right)\left(\frac{c}{2}\right)\cdots\left(\frac{c}{m-1}\right)\left(\frac{c}{n}\right) \\ &= \left(\frac{c^{m-1}}{(m-1)!}\right)\left(\frac{c}{n}\right). \end{aligned}$$
La deuxième inégalité ici découle du fait que tous les termes qui ont disparu de la deuxième ligne sont positifs et inférieurs à 1.
Soit $K = \frac{c^m}{(m-1)!}$. Nous avons alors
$$0 \leq \frac{c^n}{n!} \leq \frac{K}{n}$$
et les deux cotés de l'inégalité tendent vers zéro, donc $c^n/n! \to 0$.
5. Écrivons
$$\frac{n^p}{n!} = \left(\frac{n^p}{2^n}\right)\left(\frac{2^n}{n!}\right).$$
Par la 3^{e} assertion, $n^p/2^n \to 0$. Par la 4^{e}, on sait que $2^n/n! \to 0$. Donc le produit converge aussi vers zéro.

□

Nous pouvons maintenant calculer beaucoup de limites de quotients.

Le schema :

1. trouvez le terme « dominant » ;
2. divisez le numérateur et le dénominateur par le terme dominant ;
3. appliquez les résultats ci-dessus pour trouver les limites des différents termes. Pour cela, notre liste de suites convergeant vers zéro est très utile. Ensuite on argumente en utilisant les règles de calcul des limites.

Exemple 3.20.

1. Soit
$$x_n = \frac{n^3 + 2^n}{n^2 + 3^n}.$$
Le terme dominant est 3^n. Donc,
$$x_n = \frac{n^3/3^n + 2^n/3^n}{n^2/3^n + 1}$$
Or,
$$\begin{aligned} \frac{n^3}{3^n} &= n^3 \left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0. \\ \frac{2^n}{3^n} &= \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0. \\ \frac{n^2}{3^n} &= n^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0. \end{aligned}$$
Donc $x_n \to 0$.
2. Soit
$$x_n = \frac{3n! + 3^n}{n! + n^3}.$$
Le terme dominant est $3n!$. Donc,
$$x_n = \frac{3 + 3^n/n!}{1 + n^3/n!} \to 3.$$

3.3 Divergence : techniques

Nous nous rappelons qu'ne suite (x_n) tend vers ∞ si pour tout $K > 0$ il existe N tel que si $n \geq N$ alors $x_n > K$. Nous écrivons $x_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$, ou parfois $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Une suite (x_n) tend vers $-\infty$ si pour tout $K > 0$ il existe N tel que si $n \geq N$ alors $x_n < -K$. Nous écrivons $x_n \to -\infty$ lorsque $n \to \infty$, ou parfois $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Cette notation ne veut absolument pas dire que ∞ ou $-\infty$ sont des nombres réels !

Faite attention en essayant d'appliquer les règles de calcul aux suites dont une a une limite infinie !

Dans certaines situations, on peut traiter les sommes et produits de suites dont une a une limite infinie. Voilà un résultat de ce genre. Nous vous laissons le soin de regarder les autres cas.

Proposition 3.21. *Soit (x_n) une suite qui tend vers ∞ et $(y_n) \subset \mathbb{R}$ une autre suite.*

1. *S'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout n, $y_n > A$ alors $x_n + y_n \to \infty$.*
2. *S'il existe $P > 0$ tel que pour tout n, $y_n > P$ alors $x_n y_n \to \infty$.*

Démonstration.

1. Soit $K > 0$. Il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $x_n > K - A$, donc $x_n + y_n > K$ pour tout $n \geq N$.
2. Soit $K > 0$. Il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $x_n > K/P$. Donc $x_n y_n > K$ pour tout $n \geq N$.

$\square$

Les hypothèses sur (y_n) sont toutes les deux utiles. Par exemple, soit $x_n = n$. En prenant $y_n = -n$ on a $x_n + y_n = 0$, qui ne tend évidement pas vers l'infini. En prenant $y_n = 1/n$ on a $x_n y_n = 1$ qui encore une fois ne tend pas vers l'infini. Donc, sans les hypothèses d'une borne inférieur pour y_n, on ne peut rien dire sur la convergence ou la limite de $x_n + y_n$ ou $x_n y_n$.

Proposition 3.22 (Règles de la réciproque)**.**

1. *Soit (x_n) une suite qui tend vers ∞ ou vers $-\infty$. Alors $1/x_n \to 0$.*
2. *Soit (x_n) une suite de nombres non-nuls tel que $1/x_n \to 0$. Supposons qu'il existe M tel que que pour tout $n \geq M$, $x_n > 0$. Alors $x_n \to \infty$.*
   De même, si pour tout $n \geq M$, $x_n < 0$ alors $x_n \to -\infty$.

Démonstration.

1. Supposons que $x_n \to \infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $1/\varepsilon > 0$ et donc il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $x_n > 1/\varepsilon$. Donc pour un tel n, $0 < 1/x_n < \varepsilon$.
   Le cas $x_n \to -\infty$ est pareil. (Donnez les détails vous-même !)

2. Supposons que $x_n > 0$ pour tout n. Soit $K > 0$. Il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $0 < x_n < 1/K$. Donc pour un tel n, $1/x_n > K$.

   Le cas $x_n < 0$ est pareil. Pouvez-vous fournir les détails ?

$\square$

Exemple 3.23. Nous démontrons que $n! - 2^n \to \infty$. Pour le voir, constatons d'abord que pour tout n suffisamment grand, $n! - 2^n > 0$ ou, ce qui est équivalent, que $\frac{2^n}{n!} < 1$. En effet, $\frac{2^n}{n!} \to 0$ et donc il existe M tel que pour tout $n \geq M$, $\frac{2^n}{n!} < 1$, ce qui implique que $n! - 2^n > 0$. Comme on a

$$\frac{1}{n! - 2^n} = \frac{1/n!}{1 - 2^n/n!} \to 0,$$

$n! - 2^n \to \infty$ par la règle de la réciproque.

Définition 3.24. Soit (x_n) une suite. Étant donné une suite strictement croissante $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ d'entiers positifs, la suite $(x_{n_k})_k$ est appelée *une sous-suite* de (x_n).

Remarquons que ce sont les *indices* n_k qui forment une suite strictement croissante. La suite (x_{n_k}) n'est pas nécessairement croissante. Considérons par exemple $x_n = (-1)^n$. Alors $(x_{2k})_k = (1)$ et $(x_{2k+1})_k = (-1)$ sont deux sous-suites.

Lemme 3.25. *Soit (x_n) une suite qui converge vers a. Alors toute sous-suite de (x_n) converge aussi vers a.*

Démonstration. Soit $(x_{n_k})_k$ une sous-suite. Étant donné $\varepsilon > 0$ il faut trouver K tel que pour tout $k \geq K$, $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$.

Puisque $x_n \to x$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $|x_n - a| < \varepsilon$. Or, $n_k \geq k$. (Si vous ne voyez pas pour quoi essayez de le démontrer par induction sur k.) Donc si $k \geq N$ alors $n_k \geq N$ et il s'ensuit que $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$. En conclusion, $x_{n_k} \to a$ lorsque $k \to \infty$. $\square$

Corollaire 3.26. *Si (x_n) possède deux sous-suites convergentes mais dont les limites sont différentes, alors (x_n) ne converge pas.*

Exemple 3.27. La suite suivante est divergente :

$$x_n = \left(\frac{1 + (-1)^n n}{2n - 1}\right)$$

Pour le voir, nous considérons les deux sous-suites $(x_{2k})_k$ et $(x_{2k+1})_k$. On voit que

$$x_{2k} = \frac{1+2k}{4k-1} \to \frac{1}{2}$$

et

$$x_{2k+1} = \frac{-2k}{4k+1} \to -\frac{1}{2}.$$

3.4 Suites monotones

Nous étudions à présent un type particulièrement important de suites.

Définition 3.28. Une suite (x_n) est dite *croissante* si $x_n \leq x_{n+1}$ pour tout n.

Une suite (x_n) est dite *décroissante* si $x_n \geq x_{n+1}$ pour tout n.

Une suite est dite *monotone* si elle est soit croissante soit décroissante.

Théorème 3.29 (Convergence des suites monotones)**.** *Soit (x_n) une suite monotone et bornée. Alors elle est convergente.*

Quand (x_n) est croissante, nous avons $\lim x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Quand (x_n) est décroissante, nous avons $\lim x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Démonstration. Supposons que (x_n) est croissante. (Le cas décroissant est pareil.) Soit $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Par hypothèse, S est borné. Soit $a = \sup S$. Nous allons montrer que $x_n \to a$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque a est le majorant *minimal* de S, $a - \varepsilon$ n'est pas un majorant de S. Donc il existe x_N tel que $a - \varepsilon < x_N$. Or (x_n) est croissante, donc pour tout $n \geq N$, $x_n \geq x_N$. En même temps, puisque a majore S, $x_n \leq a$. Alors pour tout $n \geq N$, $a - \varepsilon < x_n \leq a$. Donc $|x_n - a| < \varepsilon$. □

Remarquons que si une suite croissante n'est pas majorée, alors elle tends vers ∞. De même, si une suite décroissante n'est pas minorée alors elle tends vers $-\infty$. Pouvez-vous démontrer ces deux faits ?

Dès lors, pour une suite monotone (x_n), il est toujours possible de donner une valeur (soit un nombre réel, soit $\pm\infty$) à $\lim x_n$.

Exemple 3.30.

1. Définissons par réccurence

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}.$$

Voyons que $x_n \to \sqrt{2}$ lorsque $n \to \infty$. D'abord, nous vérifions que $x_n \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \geq 1$. Nous raisonnons par récurrence. On voit que $x_1 = 3/2 > \sqrt{2}$ (puisque $(3/2)^2 = 9/4 > 2$). Constatons que

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} \geq \frac{2x_n\sqrt{2}}{2x_n} = \sqrt{2}.$$

Nous avons utilisé ici le fait que pour tout a, b, $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Ceci découle du fait que $(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$ est un carré, donc c'est un nombre positif. Dès lors $x_n^2 + 2 \geq 2x_n\sqrt{2}$. Nous avons aussi utilisé l'hypothèse d'induction qui affirme que $x_n \geq \sqrt{2}$, ce qui nous donne en particulier que $x_n > 0$.

Maintenant nous démontrons que (x_n) est décroissante :

$$x_n - x_{n+1} \;=\; \frac{2x_n^2 - x_n^2 - 2}{2x_n} \;=\; \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}.$$

Puisque $x_n \geq \sqrt{2}$, les numérateur et dénominateur sont positifs et donc $x_n \geq x_{n+1}$.

Le principe de convergence des suites monotones entraîne que (x_n) converge et $x_n \to x$ lorsque $n \to \infty$. De plus $x \geq \sqrt{2}$.

Mais $x_{n+1} \to x$ aussi et $x_{n+1} = \frac{x_n^2+2}{2x_n}$. Par les règles de calcul des limites, on en déduit que

$$\frac{x_n^2 + 2}{2x_n} \to \frac{x^2 + 2}{2x}.$$

Par l'unicité de limites, il vient $x = \frac{x^2+2}{2x}$. Donc $x^2 = 2$ i.e. $x = \pm\sqrt{2}$. Comme les termes x_n sont tous positifs, la limite doit être positive aussi. On en conclut que $x = \sqrt{2}$.

2. Nous considérons maintenant la suite

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Vérifions que (x_n) est croissante et bornée, donc convergente. Par la formule du binôme, on a

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\quad \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n, \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

Regardons la même formule pour x_{n+1}. À l'exception des deux premiers termes, qui ne changent pas, tous les termes dans l'expression de x_{n+1} sont strictement plus grands que les termes qui correspondent dans l'expression de x_n. De plus, il y a un terme positif additionnel. Donc $x_{n+1} > x_n$ et la suite est croissante.
Cette même expression pour x_n implique que

$$x_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Or $2^n \leq (n+1)!$ (par une induction facile). Donc

$$x_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Vous avez déjà peut-être rencontré les séries géométriques, comme celle-ci. Notons $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$. Alors $\frac{1}{2}s_n = s_n + \frac{1}{2^n} - 1$. Donc $s_n = 2(1 - \frac{1}{2^n}) < 2$ pour tout n. Il s'ensuit que $x_n < 3$ et donc (x_n) est bornée. Alors, par le principe de convergence des suites monotones, (x_n) converge. En fait, sa limite est le nombre e que nous avons déjà rencontré dans le premier chapitre. Nous en dirons plus à ce propos plus tard.

3.5 Théorème de Bolzano–Weierstrass

Nous expliquons maintenant une manière de construire deux suites monotones à partir d'une suite bornée quelconque.

Soit $(x_n) \subset \mathbb{R}$ une suite. Définissons

$$S_n = \{x_m : m \geq n\}$$

Si (x_n) est majorée alors $s_n = \sup S_n$ est fini pour tout n, et de plus (s_n) est une suite *décroissante* car si $m \geq n$, alors $S_m \subseteq S_n$ et donc $\sup S_m \leq \sup S_n$. De même, si (x_n) est minorée, alors $i_n = \inf S_n$ est fini pour tout n et (i_n) est une suite *croissante.*

Exemple 3.31.

1. Soit $x_n = 1/n$ pour $n \geq 1$. Nous avons

$$(s_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right),$$

et

$$(i_n) = (0, 0, 0, \ldots).$$

2. Soit $x_n = (-1)^{n+1}/n$ pour $n \geq 1$. Alors,

$$(s_n) = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$$
$$(i_n) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \ldots\right).$$

Définition 3.32. Soit une suite $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$.

- Si (x_n) est majorée, ce qui assure que $(s_n) \subset \mathbb{R}$ est bien définie, nous écrivons
$$\limsup_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty} s_n,$$
que nous appelons la *limite supérieur* de (x_n). Ici nous permettons la valeur $-\infty$ au cas où (s_n) ne serait pas minorée.
- Si (x_n) n'est pas majorée, nous écrivons $\limsup_{n\to\infty}(x_n) = \infty$.
- Si (x_n) est minorée, ce qui assure que $(i_n) \subset \mathbb{R}$ est bien définie, nous écrivons
$$\liminf_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty} i_n,$$
que nous appelons la *limite inférieur* de (x_n). Ici nous permettons à nouveau la valeur ∞ au cas où (i_n) ne serait pas majorée.
- Si (x_n) n'est pas minorée, nous écrivons $\liminf_{n\to\infty}(x_n) = -\infty$.

Constatons que pour une suite bornée, $\limsup_{n\to\infty}(x_n)$ et $\liminf_{n\to\infty}(x_n)$ sont tous les deux finis.

La propriété la plus importante de ces deux suites monotones est décrite dans le théorème suivant.

Théorème 3.33 (Théorème de Bolzano–Weierstrass)**.** *Soit (x_n) une suite bornée. Alors il existe sous-suites de (x_n) qui converge vers $\limsup_{n\to\infty}(x_n)$ et une autre qui converge vers $\liminf_{n\to\infty}(x_n)$. De plus, pour une sous-suite (x_{n_k}) convergente quelconque,*
$$\liminf_{n\to\infty}(x_n) \leq \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leq \limsup_{n\to\infty}(x_n).$$

Démonstration. Soit (x_n) une suite bornée. Nous démontrerons l'existence d'une sous-suite qui converge vers $\limsup_{n\to\infty}(x_n)$, la preuve pour la limite inférieure étant identique.

Avant de donner les détails, nous expliquons un peu l'idée de la démonstration. Rappelons que $s_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\} = \sup S_n$. Or, en tant que supremum, il n'est pas nécessairement vrai que s_n appartient à l'ensemble S_n. Si c'était le cas pour tout n, alors (s_n) serait elle-même une sous-suite de (x_n) et on aurait terminé. En revanche, même si $s_n \notin S_n$, pour tout $\varepsilon > 0$, $s_n - \varepsilon$ n'est pas un majorant de S_n et donc il existe $m \geq n$ tel que
$$s_n - \varepsilon < x_m \leq s_n.$$
Nous allons utiliser cette observation pour trouver une sous-suite de (x_n) qui est de plus en plus proche de (s_n) et qui aura la même limite lorsque $n \to \infty$.

Écrivons les détails. Nous définirons la sous-suite (x_{n_k}) terme à terme. Prenons $n_0 = 0$, c'est à dire que notre sous-suite commence avec x_0. Pour définir n_1, nous regardons l'ensemble

$$S_1 = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

de tous les termes de la suite après x_{n_0}. Vu que $s_1 - 1$ est plus petit que le supremum de S_1, il doit exister $x_m \in S_1$ avec

$$s_1 - 1 < x_m \leq s_1, \tag{3.1}$$

où l'inégalité de droite découle du fait que $s_1 = \sup S_1$. Nous choisissons pour n_1 le plus petit entier m tel que $x_m \in S_1$ et que (3.1) est satisfait. Puisque S_1 ne contient que les termes de la suite après x_{n_0}, il est évident que $n_1 > n_0$.

Nous passons maintenant à n_2. Pour le définir, nous regardons l'ensemble

$$S_{1+n_1} = \{x_{1+n_1}, x_{2+n_1}, x_{3+n_1}, \dots\}$$

de tous les termes de la suite après x_{n_1}. Vu que $s_{1+n_1} - 1/2$ est plus petit que le supremum de S_{1+n_1}, il doit exister $x_m \in S_{1+n_1}$ avec

$$s_{1+n_1} - \frac{1}{2} < x_m \leq s_{1+n_1}, \tag{3.2}$$

où l'inégalité de droite découle du fait que $s_{1+n_1} = \sup S_{1+n_1}$. Nous choisissons pour n_2 le plus petit entier m tel que $x_m \in S_{1+n_1}$ et que (3.2) est satisfaite. Puisque S_{1+n_1} ne contient que les termes de la suite après x_{n_1}, il est clair que $n_2 > n_1$.

Nous procédons de cette manière pour définir la sous-suite terme à terme. Plus précisément, supposons que nous avons trouvé $n_0 < n_1 < \dots < n_k$ tel que pour tout $j = 1, \dots, k$,

$$s_{1+n_j} - \frac{1}{j+1} < x_{n_{j+1}} \leq s_{1+n_j}. \tag{3.3}$$

Pour définir le prochain terme $x_{n_{k+1}}$ nous regardons l'ensemble

$$S_{1+n_k} = \{x_{1+n_k}, x_{2+n_k}, \dots\}$$

de tous les termes de la suite après x_{n_k}. Vu que $s_{1+n_k} - \frac{1}{k+1}$ est plus petit que le supremum de S_{1+n_k} il doit exister $x_m \in S_{1+n_k}$ avec

$$s_{1+n_k} - \frac{1}{k+1} < x_m \leq s_{1+n_k}, \tag{3.4}$$

où l'inégalité de droite découle du fait que $s_{1+n_k} = \sup S_{1+n_k}$. Nous choisissons alors pour n_{k+1} le plus petit entier m tel que $x_m \in S_{1+n_k}$ et (3.4) est satisfaite. Puisque S_{1+n_k} ne contient que les termes de la suite après x_{n_k}, on a $n_{k+1} > n_k$.

Par cette méthode nous construisons une sous-suite (x_{n_k}) de (x_n) tel que pour tout k,

$$s_{1+n_k} - \frac{1}{k+1} < x_{n_{k+1}} \leq s_{1+n_k}.$$

Vu que (s_{1+n_k}) est une sous-suite de (s_n) et que les deux suites qui encadrent $x_{n_{k+1}}$ tendent vers $\limsup(x_n)$ lorsque $k \to \infty$, il découle du théorème du sandwich que $x_{n_k} \to \limsup_{n\to\infty}(x_n)$.

Il reste à démontrer que si (x_{n_k}) est une sous-suite convergente quelconque alors sa limite se trouve entre les limites inférieur et supérieur. Par la définition de supremum et infimum, nous avons que pour tout k,

$$i_{n_k} \leq x_{n_k} \leq s_{n_k}.$$

Les suites (s_{n_k}) et (i_{n_k}) sont des sous-suites de suites convergentes et donc sont convergentes elles-mêmes avec pour limites $\limsup_{n\to\infty}(x_n)$ et $\liminf_{n\to\infty}(x_n)$ respectivement. Le résultat découle maintenant du fait que si (y_n) et (z_n) sont deux suites convergentes avec $y_n \leq z_n$ pour tout n, alors $\lim_{n\to\infty} y_n \leq \lim_{n\to\infty} z_n$ (résultat que nous vous avons laissé comme exercice). $\square$

Corollaire 3.34. *Une suite (x_n) converge si et seulement si*

$$\liminf_{n\to\infty}(x_n) = \limsup_{n\to\infty}(x_n).$$

Dans ce cas, x_n converge vers cette valeur commune lorsque $n \to \infty$.

Démonstration. Supposons que $\liminf_{n\to\infty}(x_n)$ et $\limsup_{n\to\infty}(x_n)$ existent, sont finies et sont égales. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$i_n \leq x_n \leq s_n$$

Donc par le théorème du sandwich, (x_n) converge et sa limite est égale à $\liminf_{n\to\infty}(x_n) = \limsup_{n\to\infty}(x_n)$.

La réciproque découle du théorème de Bolzano–Weierstrass. Si $x_n \to x$, alors toute sous-suite converge aussi vers x. Il est également possible de le démontrer directement (c'est un excellent exercice). $\square$

Nous avons maintenant trois résultats qui décrivent les liens entre la convergence d'une suite et le fait qu'elle est bornée :

1. toute suite convergente est bornée ;
2. toute suite monotone et bornée est convergente ;
3. toute suite bornée possède une sous-suite convergente.

3.6 Le critère de Cauchy

La définition de convergence mentionne *explicitement* la limite de la suite. Pour démontrer qu'une suite converge à partir de la définition, il faut donc a priori deviner la limite avant de se lancer. Nous avons déjà donné quelques techniques systématiques pour deviner la limite (les règles de calcul des limites) et une manière d'éviter le problème dans le cas particulier des suites monotones et bornées. Mais que fait-on en général quand deviner la limite est impossible ?

Nous donnons maintenant une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite converge et ce critère *ne mentionne pas la limite.*

Définition 3.35. Une suite (x_n) est dite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que si $m, n \geq N$ alors $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Cette définition exprime que les termes d'une suite de Cauchy deviennent de plus en plus proche. Mais ce n'est pas juste la distance entre deux termes successifs, $|x_n - x_{n+1}|$, qui tend vers zéro. C'est la distance entre deux termes x_n, x_m quelconques dans la suite qui devient de plus en plus petite lorsque m et n sont suffisamment grands.

Lemme 3.36. *Soit (x_n) une suite convergente. Alors (x_n) est de Cauchy.*

Démonstration. Supposons que $x_n \to a$ lorsque $n \to \infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que si $n \geq N$ alors $|x_n - a| < \varepsilon/2$. Alors si $m, n \geq N$, nous avons

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \varepsilon.$$

□

Théorème 3.37 (Critère de Cauchy)**.** *Une suite (x_n) converge si et seulement si elle est de Cauchy.*

Démonstration. Étant donné le lemme précédent, il suffit de démontrer qu'une suite de Cauchy converge.

Soit (x_n) une suite de Cauchy. Nous commençons par prouver que (x_n) est bornée. Prenons $\varepsilon = 1$ dans la définition de Cauchy. Il existe N tel que pour tout $m, n \geq N$, $|x_n - x_m| < 1$. Donc pour tout $n \geq N$,

$$|x_n| = |x_n - x_N + x_N| \leq |x_n - x_N| + |x_N| < 1 + |x_N|.$$

Soit

$$K = \max\{|x_0|, |x_1|, \ldots, |x_{N-1}|, 1 + |x_N|\}.$$

Il s'ensuit que $|x_n| \leq K$ pour n quelconque et donc (x_n) est bornée.

Nous pouvons maintenant appliquer le théorème de Bolzano–Weierstrass qui entraîne l'existence d'une sous-suite convergente $(x_{n_k})_k$. Écrivons $x_{n_k} \to a$ lorsque $k \to \infty$. Nous allons démontrer que la suite entière converge à a.

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N_1 tel que si $k \geq N_1$ alors $|x_{n_k} - a| < \varepsilon/2$.

De plus, puisque (x_n) est de Cauchy, il existe N_2 tel que si $m, n \geq N_2$ alors $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$.

Nous choisissons k_0 tel que $k_0 \geq N_1$ et $n_{k_0} \geq N_2$. Pour $n \geq N_2$, il vient

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_{k_0}}| + |x_{n_{k_0}} - a| < \varepsilon.$$

En conclusion, $x_n \to a$ lorsque $n \to \infty$. $\square$

Exemple 3.38. Supposons que (x_n) est une suite telle que pour tout n, $|x_{n+1} - x_n| \leq c^n$ où $0 < c < 1$. Nous allons démontrer que (x_n) converge en utilisant le critère de Cauchy.

Soit $m > n$. Alors,

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \cdots + |x_{m-1} - x_m| \\ &\leq c^n + c^{n+1} + \cdots + c^{m-1}. \end{aligned}$$

Écrivons $s_{m,n} = c^n + \cdots + c^{m-1}$. Nous avons que $cs_{m,n} = s_{m,n} + c^m - c^n$, donc

$$s_{m,n} = \frac{c^n - c^m}{1 - c} \leq \frac{c^n}{1 - c}.$$

Mais $c^n(1-c)^{-1} \to 0$ lorsque $n \to \infty$ par les règles de calcul. Dès lors, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour $m > n$ et $n \geq N$, $s_{m,n} < \varepsilon$ et donc $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Il s'ensuit que (x_n) est de Cauchy et donc convergente.

4 Fonctions continues

Dans cette section, nous passons à l'étude des fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et nous commençons par définir les fonctions continues.

Intuitivement une fonction est continue si son graphe est une courbe en un seul morceau, i.e. sans « trou ». Le premier but principal est de donner une définition rigoureuse de cette idée. Le deuxième but est d'exploiter notre définition pour démontrer des théorèmes importants concernant les fonctions continues. D'une part, ces résultats montrent que les fonctions continues —selon notre définition— se comportent de manière conforme à notre intuition. D'une autre part, ils nous permettrons de déduire des choses éventuellement inattendues concernant les fonctions continues.

4.1 Limites d'une fonction en un point

La définition de la continuité se base sur le concept de limite d'une fonction en un point. Intuitivement, la limite de f lorsque $x \to a$ est la limite des valeurs de $f(x)$ lorsque nous prenons x de plus en plus proche du point a.

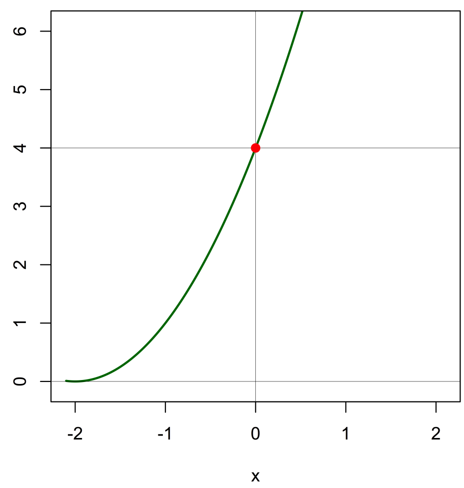


Figure 3 – Graphe de la fonction $x \mapsto \frac{((x+1)^2-1)^2}{x^2}$.

Pour définir la limite, il faut que la fonction soit définie près de a mais il est utile de pouvoir considérer des cas où la fonction n'est pas définie au point a lui-même. Par exemple la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ n'est pas définie en $x = 0$ mais nous avons vu dans la première section qu'elle possède une limite (que nous allons définir rigoureusement) en $x = 0$. Nous sommes intéressés par le comportement de $f(x)$ en les points *près* de a, pas forcément par la valeur prise par la fonction *en* a.

En guise d'exemple, considérons $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{((x+1)^2-1)^2}{x^2}$, qui a pour domaine $U = \mathbb{R}_0$. Bien que f ne soit pas définie en $x = 0$, on peut parler de la limite de f quand $x \to 0$. Cette limite doit être définie soigneusement.

Avant d'aborder la définition de limite de f en a, nous avons besoin d'introduire du vocabulaire et des notations.

Définition 4.1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Nous écrivons

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\};\\
(a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\};\\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\};\\
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\};
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
[a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}\\
(a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}\\
(-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}\\
(-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}
\end{aligned}$$

Ces ensembles sont les *intervalles* de $\mathbb{R}$.

Parmi ces intervalles, certains peuvent être qualifiés d'ouverts ou de fermés.

Définition 4.2. Un sous-ensemble $U \subset \mathbb{R}$ est dit *ouvert* si et seulement si pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$.

Un sous-ensemble $F \subset \mathbb{R}$ est dit fermé si et seulement si son complémentaire $\mathbb{R} \setminus F = \{x \in \mathbb{R} : x \notin F\}$ est ouvert.

Les ouverts sont les ensembles dont tous les points sont intérieurs.

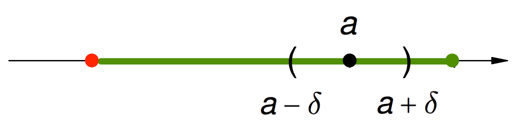


FIGURE 4 – Point intérieur

Définition 4.3. Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Le point a est intérieur à A s'il existe $\delta > 0$ tel que $(a - \delta, a + \delta) \subset A$.

Par exemple, 1 est intérieur à $[0, 2]$, mais 2 ne l'est pas ; 25 n'est pas intérieur à $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

Définition 4.4. L'intérieur $\text{int}(A)$ de A est l'ensemble des points intérieurs à A.

Exemples :

- $\text{int}([0, 2]) = \text{int}((0, 2]) = \text{int}((0, 2)) = (0, 2)$;
- $\text{int}([1, +\infty)) = \text{int}((1, +\infty)) = (1, +\infty)$;
- $\text{int}(\mathbb{N}) = \text{int}(\mathbb{Z}) = \text{int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$;
- $\text{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Remarquons qu'on a toujours $\text{int}(A) \subset A$. Comme vous pourrez le vérifier vous-même, pour $a, b \in \mathbb{R}$, les intervalles de la forme (a, b) sont ouverts et ceux de la forme $[a, b]$ sont fermés. De même, les intervalles de la forme (a, ∞) et $(-\infty, b)$ sont ouverts alors que $[a, \infty)$ et $(-\infty, b]$ sont fermés. Finalement $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ est en même temps ouvert et fermé.

Définition 4.5. Étant donné $a \in \mathbb{R}$, un voisinage de a est un ensemble qui contient un intervalle de la forme (c, d) pour $c < a < d$.

FIGURE 5 – Point adhérent

Définition 4.6. Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Le point a est adhérent à A si pour tout $\delta > 0$, $(a - \delta, a + \delta) \cap A \neq \varnothing$.

En d'autres termes, a est adhérent à A si et seulement si tous les voisinages de a ont une intersection non-vide avec A.

Par exemple, 0, 1, et 2 sont adhérents à $[0, 2]$, mais 2.1 ne l'est pas ; 25 est adhérent à $\mathbb{N}$, mais $1/2$ ne l'est pas ; 0, $1/2$ et $\sqrt{2}$ sont adhérents à $\mathbb{Q}$.

Définition 4.7. L'adhérence (ou la fermeture) $\text{adh}(A)$ de A est l'ensemble des points adhérents à A.

Exemples :
- $\text{adh}([0,2]) = \text{adh}((0,2]) = \text{adh}((0,2)) = [0,2]$;
- $\text{adh}([1,+\infty)) = \text{adh}((1,+\infty)) = [1,+\infty)$;
- $\text{adh}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$;
- $\text{adh}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$;
- $\text{adh}(\mathbb{Q}) = \text{adh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Remarquons qu'on a toujours $A \subset \text{adh}(A)$. Vous pourrez vérifier que A est fermé si $A = \text{adh}(A)$.

Nous somme maintenant prêts à donner la définition rigoureuse de la limite d'une fonction en un point.

Définition 4.8. Soient $f\colon U \to \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ et $a \in \text{adh}(U \cap B)$. La *limite de f dans B lorsque x tend vers a existe dans* $\mathbb{R}$ *et vaut* $\ell \in \mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in U \cap B$ et $|x - a| < \delta$ alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Dans ce cas nous écrivons $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to a$ dans B ou bien

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x) = \lim_{x \overset{B}{\to} a} f(x) = \ell.$$

S'il n'y a pas de valeur réelle ℓ pour laquelle cette définition est satisfaite, nous disons que *la limite de f lorsque x tend vers a dans B n'existe pas.*

En d'autres termes, quel que soit $\varepsilon > 0$ (qui détermine un voisinage $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ de ℓ), il existe $\delta > 0$ (qui détermine un voisinage $(a - \delta, a + \delta)$ de a) tel que

$$f((a - \delta, a + \delta) \cap U \cap B) \subset (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon).$$

Une remarque importante : δ dépend de ε et aussi de a ! Notons aussi que la restriction $x \in B$ ci-dessus est plus importante que la restriction $x \in U$, laquelle ne fait qu'assurer qu'on puisse parler de $f(x)$ étant donné que f n'est a priori définie que sur U.

Si f possède une limite en un point, celle-ci est forcément unique et nous pouvons donc bien parler dans la définition de <u>la</u> limite de f en a dans B.

Théorème 4.9. *Soient $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, et $a \in \text{adh}(U \cap B)$.*
Supposons qu'il existe $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x) = \ell_1$$

et

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in B}} f(x) = \ell_2.$$

Alors $\ell_1 = \ell_2$.

Démonstration. Prenons $\varepsilon = |\ell_1 - \ell_2|/3$. Par hypothèse,
- il existe $\delta_1 > 0$ tel que $x \in (U \cap B)$ et $|x-a| < \delta_1$ implique $|f(x) - \ell_1| \leq \varepsilon$;
- il existe $\delta_2 > 0$ tel que $x \in (U \cap B)$ et $|x-a| < \delta_2$ implique $|f(x) - \ell_2| \leq \varepsilon$.

Prenons alors $x_0 \in (U \cap B)$ tel que $|x_0 - a| < \min(\delta_1, \delta_2)$ (un tel x_0 existe toujours ; pourquoi ?) Son image $f(x_0)$ est alors à la fois dans $(\ell_1 - \varepsilon, \ell_1 + \varepsilon)$ et $(\ell_2 - \varepsilon, \ell_2 + \varepsilon)$. Ceci est une contradiction car ces deux intervalles sont d'intersection vide. □

Pour bien comprendre le formalisme en ε/δ, nous vous conseillons de démontrer les équivalences suivantes.

Proposition 4.10. *La limite de f dans B pour $x \to a$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : x \in (U \cap B) \ \textit{et}\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : x \in (U \cap B) \ \textit{et}\ |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : x \in (U \cap B) \ \textit{et}\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : x \in (U \cap B) \ \textit{et}\ |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

si et seulement si pour $C > 0$ fixé,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : x \in (U \cap B) \ \textit{et}\ |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq C\varepsilon.$$

Nous avons donné une définition de limite dans B. Le cas particulier $B = \mathbb{R}$ est le plus naturel. La contrainte que $a \in \operatorname{adh}(B \cap U) = \operatorname{adh}(U)$ signifie alors que a doit être dans le domaine ou sur son bord. Nous verrons d'autres cas particuliers importants de choix de B plus tard.

Définition 4.11. La *limite de f pour $x \to a$* existe dans $\mathbb{R}$ et vaut ℓ, ce que nous notons

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell,$$

si la limite de f dans $B = \mathbb{R}$ pour $x \to a$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut ℓ.

Comme nous venons de le voir, ceci signifie que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que

$$f((a - \delta, a + \delta) \cap U) \subset (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon).$$

Illustrons ceci graphiquement sur l'exemple considéré en début de paragraphe. Soit $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{((x+1)^2-1)^2}{x^2}$, qui a pour domaine $U = \mathbb{R}_0$. Choisissons $a = 0 \in \operatorname{adh}(U)$. On voit visuellement sur le graphe que pour toute « bande horizontale » choisie de largeur 2ε centrée en 4, on peut trouver une « bande verticale » centrée en 0 de largeur 2δ dont tous les points sont envoyés dans $(4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon)$, i.e. dans la bande horizontale préalablement fixée autour de 4. On s'attend donc à ce que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 4.$$

On le vérifie dans un instant à l'aide de la définition.

Comme pour la convergence des suites, la détermination d'une limite — par l'intermédiaire de la définition— demande une preuve mathématique. Examinons des exemples élémentaires pour gagner de l'assurance dans l'utilisation de la définition.

Exemples 4.12. – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto c$ une fonction constante. Alors $\lim_{x \to a} f(x) = c$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Preuve : soit $\varepsilon > 0$. Avec un $\delta > 0$ arbitraire, on a : si $x \in U$ et $|x - a| < \delta$, alors $|f(x) - f(a)| = c - c = 0 < \varepsilon$. □

– Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$ la fonction identité. Alors $\lim_{x \to a} f(x) = a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Preuve : soit $\varepsilon > 0$. Avec $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0$ (on voit donc ici explicitement la dépendance de δ en ε), on a : si $x \in U$ et $|x - a| < \delta$, alors $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon$. □

– Soit $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{((x+1)^2-1)^2}{x^2}$. Alors $\lim_{x \to 0} f(x) = 4$.

Preuve : on s'aperçoit que pour un $\varepsilon > 0$ fixé, on peut prendre $\delta(\varepsilon) = \sqrt{4 + \varepsilon} - 2$. En effet, si $|x| < \delta$, on a

$$\left|\frac{((x+1)^2 - 1)^2}{x^2} - 4\right| = \left|\frac{(x^2 + 2x)^2 - 4x^2}{x^2}\right| = |x^2 + 4x| < \delta^2 + 4\delta$$

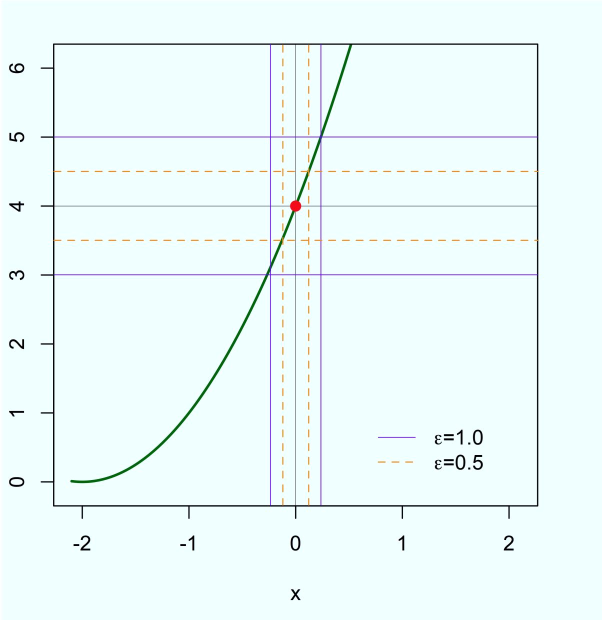


FIGURE 6 – $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $f((a-\delta, a+\delta) \cap U) \subset (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$.

et on voit que

$$\delta^2 + 4\delta < \varepsilon$$

si (prendre les racines du polynôme du deuxième degré en δ)

$$\delta < \sqrt{4+\varepsilon} - 2.$$

□

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ la fonction valeur absolue. Alors quelque soit $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to a} f(x) = |a|$.

  Preuve : soit $\varepsilon > 0$. Avec $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0$, on a que si $x \in U$ et $|x - a| < \delta$, alors $|f(x) - f(a)| = ||x| - |a|| \leq |x - a| < \delta = \varepsilon$, où on a utilisé de fçon indirecte l'inégalité triangulaire. □
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x - 1$. Nous démontrons que $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$.

  Preuve : soit $\varepsilon > 0$. Il faut trouver $\delta > 0$ tel que si $|x - 2| < \delta$ alors $|(3x - 1) - 5| < \varepsilon$. Prenons $\delta = \varepsilon/3$. Si $|x - 2| < \varepsilon/3$ alors $|3x - 6| < \varepsilon$, ce qui démontre que $f(x) \to 5$ lorsque $x \to 2$. □
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Nous démontrons que $\lim_{x \to 3} f(x) = 9$.

  Preuve : soit $\varepsilon > 0$. Il faut trouver $\delta > 0$ tel que si $|x-3| < \delta$ alors $|x^2-9| < \varepsilon$. Constatons que $|x^2 - 9| = |x - 3||x + 3|$. En prenant $\delta \leq 1$, nous pouvons assurer que si $|x - 3| < \delta$ alors $|x + 3| \leq 7$. Donc si $|x - 3| < \delta \leq 1$, alors

$$|x^2 - 9| < 7\delta.$$

D'ici nous voyons que $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$ fonctionne dans la définition. $\square$

Insistons que pour établir qu'une limite n'existe pas, il faut aussi avoir recours à la définition (ou à des conditions nécessaires d'existence que nous regarderons plus tard).

Pour établir que

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq \ell,$$

on doit montrer que

$$\exists\, \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0,\ \exists\, x \in U \text{ satisfaisant } |x-a| < \delta \text{ et } |f(x)-\ell| \geq \varepsilon.$$

Pour montrer que $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas, il faut prouver que

$$\textbf{\textit{pour tout }} \ell \in \mathbb{R} : \lim_{x\to a} f(x) \neq \ell.$$

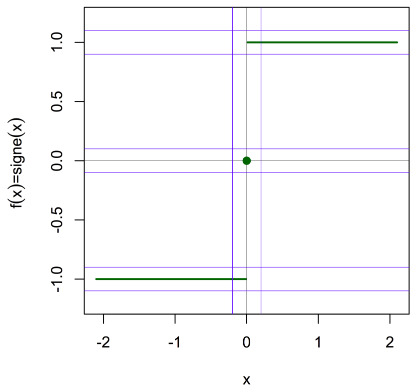


FIGURE 7 – La fonction signe n'a pas de limite en $a = 0$.

Par exemple, considérons la limite $\lim_{x\to 0} f(x)$, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction "signe", qui envoie x sur 1, 0, ou -1 respectivement si x est positif, nul, ou négatif (donc $U = \mathbb{R}$).

On vérifie facilement en niant la définition de limite que

$$\lim_{x\to 0} f(x) \neq 1, \qquad \lim_{x\to 0} f(x) \neq 0, \qquad \lim_{x\to 0} f(x) \neq -1,$$

et puis finalement que f n'a pas de limite en 0. Dans cet exemple, il est tentant de considérer qu'il existe
– une limite à gauche en $a = 0$, qui vaut $\ell = -1$, et
– une limite à droite en $a = 0$, qui vaut $\ell = 1$.
Nous y revenons dans un instant.

Considérons un exemple moins élémentaire de non existence de limite. Soit $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(1/x)$. La limite de f n'existe pas lorsque $x \to 0$. En effet, quel que soit ℓ, il n'y a pas de valeur pour δ qui marche lorsque $\varepsilon = 1$. Pour le voir, constatons que quel que soit $\delta > 0$, il existe p avec $|p| < \delta$ et $\sin(1/p) = 1$ et q avec $|q| < \delta$ et $\sin(1/q) = -1$. Par exemple, $p = \frac{1}{(2n+1/2)\pi}$ et $q = \frac{1}{(2n-1/2)\pi}$ pour n suffisamment grand. Comme $|\sin(1/p) - \ell| < 1$ et $|\sin(1/q) - \ell| < 1$ impliquerait que

$$|\sin(1/p) - \sin(1/q)| \leq |\sin(1/p) - \ell| + |\sin(1/q) - \ell| < 1 + 1 < 2,$$

on a une contradiction puisque $\sin(1/p) - \sin(1/q) = 2$.

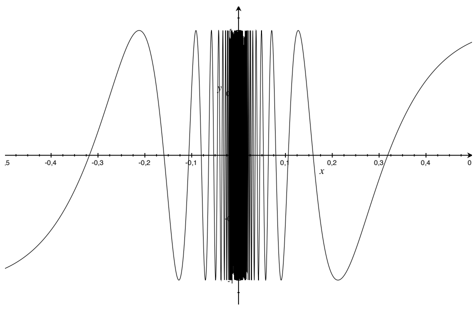


FIGURE 8 – La fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ n'a pas de limite en $a = 0$. Ça se voit non ?

Nous allons définir rigoureusement les notions de limites à gauche et à droite mentionnées ci-dessus dans la prochaine sous-section.

Limites à gauche, à droite, et pointées

Comme annoncé précédemment, d'autres choix de B dans la définition 4.8 sont particulièrement intéressants.

> **Définition 4.13.** Étant donné $a \in \mathbb{R}$, un voisinage pointé de a est un ensemble qui contient un intervalle pointé de a, c'est-à-dire un ensemble de la forme $(c, d) \setminus \{a\}$, pour $c < a < d$ mais qui ne contient pas nécessairement le point a. Un voisinage à droite de a est un ensemble qui contient un intervalle de la forme $intercoa, \ell$ pour $b > a$. Un voisinage pointé à droite de a et un ensemble qui contient un intervalle de la forme (a, b) pour $b > a$ mais qui ne contient pas nécessairement a. Nous définissons de façon analogue un voisinage à gauche de a et un voisinage pointé à gauche de a.

Dans la définition suivante, il est nécessaire de supposer que a est un point « adhérent à gauche » ou « adhérent à droite » du domaine de la fonction (et adhérent au domaine moins le point où l'on prend la limite dans le cas de la limite pointée). Nous serons plus précis dans un instant. Il est suffisant que f soit définie dans un voisinage pointé de a dans les trois cas et nous choisissons cette hypothèse pour simplifier l'exposé dans un premier temps.

Définition 4.14. Soit $f\colon U \to \mathbb{R}$ et supposons que U contienne un voisinage pointé de a. La limite à gauche, respectivement à droite ou pointée, de f lorsque $x \to a$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut ℓ si la limite de f dans $B = (-\infty, a)$, respectivement dans $B = (a, \infty)$, et dans $B = \mathbb{R} \setminus \{a\}$, quand $x \to a$ existe dans $\mathbb{R}$ et vaut ℓ.

Nous notons respectivement

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = b, \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = b.$$

Vous trouverez dans certains ouvrages les appellations limites "par valeurs plus petites", "par valeurs plus grandes", et "par valeurs différentes" et les notations $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to a^-$ ou

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \ell$$

et $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to a^+$ ou

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \ell$$

pour désigner les limites à gauche et à droite au point a. Attention aussi que dans certains ouvrages, la notation $\lim_{x\to a}$ désigne une limite pointée exactement dans le sens $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}$ et malheureusement la convention dépend de l'auteur et peut changer d'un livre à l'autre. Pour lever toute ambiguité, nous nous efforçons donc de conserver les notations précédentes qui précisent si la limite est pointée ou « standard ». Nous insistons ici aussi sur le fait que *la valeur de f en a n'a rien à voir avec la limite pointée de f en a* et n'influence pas non plus les limites à gauche ou à droite. La limite à gauche, à droite ou pointée est déterminée par le comportement de f à gauche, à droite ou près du point a mais *pas au* point a.

Pour parler des limites à gauche, respectivement à droite ou pointée, de f lorsque $x \to a$, il faut bien entendu que f soit définie proche de a. Nous avons supposé que U contient un voisinage pointé de a, ce qui suffit. Plus précisément, il est nécessaire que a soit adhérent à $U \cap B$ où $B = (-\infty, a)$, respectivement (a, ∞), et $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

Réécrivons finalement les trois définitions en termes de ε et δ pour bien visualiser les différents choix de B.

Nous disons que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a par la droite si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in U$ avec $0 < x - a < \delta$, alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

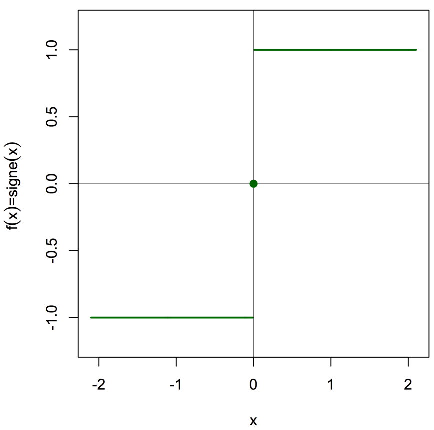
Nous disons que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a par la gauche si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in U$ avec $0 < a - x < \delta$, alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Nous disons que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a par valeur différente si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in U$ avec $0 < |a - x| < \delta$, alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Nous laissons la démonstration du résultat suivant comme excellent exercice qui vous permettra de confirmer que vous avez assimiler les concepts que nous venons d'introduire.

Lemme 4.15. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f\colon U \to \mathbb{R}$ definie sur un voisinage pointée de a. Alors f possède une limite pointée en a si et seulement si f possède une limite à gauche en a et une limite à droite en a et si ces deux limites sont égales. Dans ce cas,* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$

Remarquons encore que lorsque la limite "standard" (celle de la définition de limite dans $B = \mathbb{R}$) existe, les limites à gauche, à droite, et pointée existent et sont égales à cette limite (à nouveau, c'est un très bon exercice de le démontrer).



Considérons de nouveau la fonction signe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (pour laquelle $U = \mathbb{R}$) en guise d'illustration. Vous pourrez vérifier facilement (écrivez les détails !) que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -1, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) \quad \nexists.$$

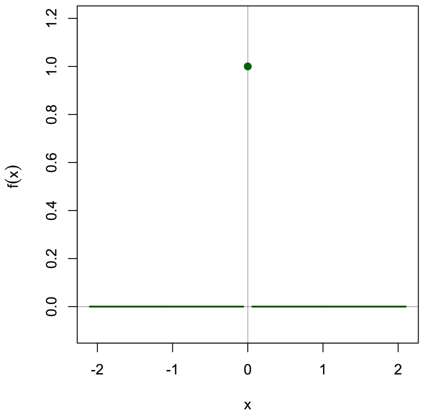
On observe de même que la limite en zéro n'existe pas.

Considérons maintenant la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ (ici aussi $U = \mathbb{R}$).

On vérifie aisément (écrivez les détails !) que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 0, \ \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 0, \ \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 0$$

mais par contre la limite en 0 n'existe pas puisque $f(0) \neq 0$.



Conditions nécessaires et suffisantes

Dans ce paragraphe, nous donnons deux conditions nécessaires et suffisantes d'existence de limite. Vous verrez que ce sont les conditions nécessaires qui sont les plus utiles en pratique car bien souvent elles donnent une façon simple de conclure qu'une limite n'existe pas.

La proposition suivante peut sembler évidente. Elle donne une condition nécessaire très pratique.

> **Proposition 4.16.** *Soient $f\colon U \to \mathbb{R}$ une fonction, $B \subset \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{adh}(U \cap B)$. La limite de f dans B lorsque x tend vers a existe dans $\mathbb{R}$ et vaut $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si pour tout sous-ensemble $A \subseteq B$, la limite de f dans A lorsque x tend vers a existe dans $\mathbb{R}$ et vaut ℓ.*

Démonstration. La preuve de la condition suffisante est évidente puisque si la limite de f dans A lorsque x tend vers a vaut ℓ pour tout $A \subseteq B$, on peut prendre $A = B$.

Pour la condition nécessaire, observons que puisque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 : x \in (U \cap A) \text{ et } |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon,$$

quelque soit $\varepsilon > 0$ fixé et $A \subseteq B$ fixé, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in A$, $|f(x) - b| < \varepsilon$.

$\square$

Illustrons la proposition par un exemple tout à fait académique. Considérons la fonction qui prend la valeur 1 sur $\mathbb{Q}$ et 0 sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En tout point, la fonction ne possède pas de limite (ni de limite pointée, à gauche ou à droite). Écrivez les détails !

La deuxième condition nécessaire et suffisante est une caractérisation qui utilisent les suites.

Proposition 4.17. *Soient $f\colon U \to \mathbb{R}$ une fonction, $B \subset \mathbb{R}$ et $a \in \operatorname{adh}(U \cap B)$. La limite de f dans B lorsque x tend vers a existe dans $\mathbb{R}$ et vaut $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \subset B$ qui converge vers a, la limite de la suite $(f(x_n))_n$ lorsque n tend vers l'infini existe dans $\mathbb{R}$ et vaut ℓ.*

Démonstration. Supposons d'abord que $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to a$ et soit $(x_n)_n \subset U$ une suite qui converge vers a. Démontrons que $f(x_n) \to \ell$ lorsque $n \to \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par l'hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in U$ avec $|x - a| < \delta$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Or, $x_n \to a$ lorsque $n \to \infty$, donc il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $|x_n - a| < \delta$. De plus, puisque $(x_n) \subset U$, si $n \geq N$, on a $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$. Ceci montre bien que $f(x_n) \to \ell$.

Pour la réciproque, nous raisonnons par l'absurde. Supposons que pour toute suite $(x_n) \subset U$ qui converge vers a, $(f(x_n))$ converge vers l, mais que $f(x)$ ne converge pas ver l.

Alors, il doit exister un choix de ε pour lequel la définition de la limite n'est pas satisfaite. C'est a dire qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que n'y a aucune valeur $\delta > 0$ qui marche dans la définition avec le choix $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Particularisons au choix $\delta = 1/n$. On en déduit que pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n \in U$ tel que $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$. Nous construisons ainsi une suite $(x_n) \subset U$ telle que $|x_n - a| < \frac{1}{n}$. On en déduit que $x_n \to a$ et donc $(f(x_n)) \to \ell$ lorsque $n \to \infty$ par hypothèse. Mais ceci contredit le fait que $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$ pour tout n. □

Exemple 4.18. Nous donnons une deuxième démonstration du fait que la fonction $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(1/x)$ ne possède pas de limite en 0.

Soit $x_n = \frac{1}{n\pi}$; $x_n \to 0$ et $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0$.

Soit $y_n = \frac{1}{(2n+1/2)\pi}$; $y_n \to 0$ et $f(y_n) = \sin((2n + 1/2)\pi) = 1$.

Puisque $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ ont des limites différentes, f ne possède pas de limite en 0.

Remarquons que nous aurions pu énoncer les conditions nécessaires et suffisantes précédentes dans le cas de la limite dans B (et donc aussi pour les limites pointées, à gauche et à droite).

Règles de calcul des limites

Comme certains exemples ci-dessus le montrent, il est parfois fastidieux de vérifier l'existence d'une limite directement à partir de la définition. Comme pour le calcul des limites des suites, il y a des règles de calcul sur lesquels on peut s'appuyer.

Théorème 4.19 (Règles de calcul des limites)**.** *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un voisinage de a. Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a} g(x) = m$. Alors,*

1. $\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = \ell + m$.
2. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \ell m$.
3. *Si $m \neq 0$, alors le quotient $f(x)/g(x)$ est défini sur un voisinage de a (peut-être plus petit que U) et $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \ell/m$.*

Démonstration.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Nous savons que d'une part il existe $\delta_1 > 0$ tel que si $x \in U$ et $|x - a| < \delta_1$, alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon/2$ et d'autre part, il existe $\delta_2 > 0$ tel que si $x \in U$ et $|x - a| < \delta_2$, alors $|g(x) - \ell| < \varepsilon/2$.
   Prenons $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Alors, pour tout $x \in U$, dès que $|x - a| < \delta$,
   $$|f(x) + g(x) - \ell - m| \leq |f(x) - \ell| + |g(x) - m| < \varepsilon.$$
2. Calculons
   $$\begin{aligned} |f(x)g(x) - \ell m| &= |f(x)(g(x) - m) + m(f(x) - \ell| \\ &\leq |f(x)||g(x) - m| + |m||f(x) - \ell| \end{aligned}$$
   Nous allons démontrer dans un premier temps que f est bornée près de a. Soit $\varepsilon = 1$ dans la définition de la limite de f. Pour ce choix, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in U$ et $|x - a| < \delta_1$ alors $|f(x) - \ell| < 1$. Donc, pour tel x, $|f(x)| < |\ell| + 1$.
   Fixons maintenant $\varepsilon > 0$ arbitrairement. Nous voulons trouver $\delta > 0$ tel que si $x \in U$ et $|x - a| < \delta$, alors $|f(x)g(x) - \ell m| < \varepsilon$.
   Par la définition de limite, nous savons qu'il existe $\delta_2 > 0$ tel que si $x \in U$ et $|x - a| < \delta_2$, alors
   $$|f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2(|m| + 1)}.$$
   Il existe aussi $\delta_3 > 0$ tel que pour tout $x \in U$ satisfaisant $|x - a| < \delta_2$, on a
   $$|g(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2(|l| + 1)}.$$
   Prenons maintenant $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Pour $x \in U$ tel que $|x - a| < \delta$, nous avons
   $$\begin{aligned} |f(x)g(x) - \ell m| &\leq |f(x)||g(x) - m| + |m||f(x) - \ell| \\ &\leq (|l| + 1)|g(x) - m| + |m||f(x) - \ell| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

3. Nous démontrons d'abord qu'il existe un voisinage V de a sur lequel $g(x) \neq 0$. Puisque $m \neq 0$, on peut prendre $\varepsilon = |m|/2 > 0$. Avec ce choix de ε, la définition de la limite de g en a nous assure l'existence de $\tilde{\delta} > 0$ tel que si $x \in U$ et $|x - a| < \tilde{\delta}$, alors $|g(x) - m| < |m|/2$. Donc pour un tel x, $|g(x)| > |m|/2$ et donc $g(x) \neq 0$. Prenons $V = U \cap (a - \tilde{\delta}, a + \tilde{\delta})$. Sur V la fonction $x \mapsto f(x)/g(x)$ est bien définie. Montrons que $1/g(x)$ tend vers $1/m$ lorsque $x \to a$. Il suffit ensuite d'invoquer l'assertion 2 pour conclure. Constatons que
$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m}\right| = \frac{|g(x) - m|}{|g(x)||m|}.$$
Nous avons déjà démontré que $|g(x)| > |m|/2$ sur V, c'est-à-dire
$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m}\right| < \frac{2}{|m|^2}|g(x) - m|$$
Pour $\varepsilon > 0$ fixé, la définition de la limite de g en a nous assure qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|g(x) - m| < |m|^2\varepsilon/2$ pour tout $x \in U$ satisfaisant $|x - a| < \delta$. Il s'ensuit que si $x \in V$ et $|x - a| < \delta$, alors $|1/g(x) - 1/m| < \varepsilon$.

□

Nous avons aussi une version du théorème du sandwich dans ce contexte.

Théorème 4.20 (Test de comparaison, « théorème du sandwich »)**.** *Soient $f, g, h \colon U \to \mathbb{R}$ des fonctions définies sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}$. Supposons que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in U$ et*
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell = \lim_{x\to a} h(x).$$
Alors $\lim_{x\to a} g(x) = \ell$.

La démonstration est laissée en guise d'exercice. Vous pouvez par exemple utiliser la condition nécessaire et suffisante d'existence de la limite en terme de suites. Dans ce cas, vous pouvez recycler le théorème du sandwich pour les suites. Écrivez les détails !

Exemple 4.21.

1. Nous voulons calculer
$$\lim_{x\to 1} \frac{4x^2 - 3x + 2}{3x^3 + 2}.$$
D'abord constatons que $\lim_{x\to 1} x = 1$ (Pourquoi ? Étant donné $\varepsilon > 0$, que prendre comme δ ?)

Il découle des règles de calcul des limites que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} x^2 &= 1,\\ \lim_{x\to 1}(4x^2 - 3x + 2) &= 3,\\ \lim_{x\to 1}(3x^3 + 2) &= 5.\end{aligned}$$

On en déduit que la limite que nous cherchons vaut $3/5$.

2. Soit $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par la relation $f(x) = x^2\sin(1/x)$.

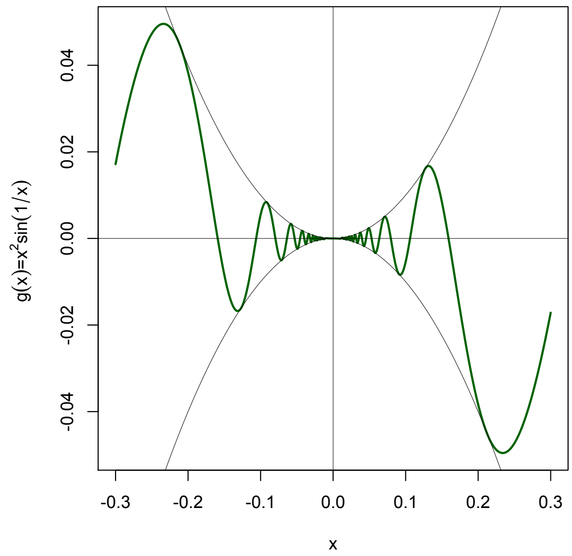


FIGURE 9 – $x \mapsto x^2\sin(1/x)$

Comme $|\sin(y)| \leq 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a pour tout $x \neq 0$,

$$-x^2 \leq f(x) \leq x^2.$$

Il suit du théorème du sandwich que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$.

Remarquons que nous aurions pu énoncer les règles de calcul des limites pour la limite restreinte à un ensemble B comme définie dans la définition 4.8. En particulier, les règles des limites s'appliquent aux limites pointées, à gauche ou à droite. Nous ne donnons pas les détails (qui sont essentiellement identiques).

Exemples 4.22.

1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \text{ si } x \leq 0,\\ x^2 \text{ si } x > 0.\end{cases}$$

Les règles de calcul des limites montre facilement que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

Donc f possède une limite pointée en 0, et cette limite vaut 0.

2. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ est l'entier le plus grand satisfaisant $\lfloor x \rfloor \leq x$.
   Pour $0 \leq x < 1$, $f(x) = x$. Pour $-1 < x \leq 0$, $f(x) = x+1$. Donc, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ alors que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$. Puisque les deux limites sont différentes, nous voyons que f ne possède pas de limite en 0.

Exemple 4.23. L'exemple que nous considérons maintenant est plus complexe. Nous montrons que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ existe dans $\mathbb{R}$ et nous calculons sa valeur.

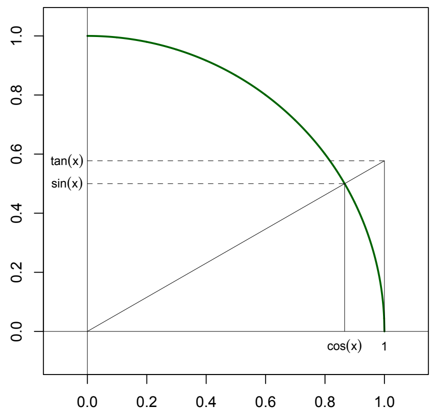


Figure 10 – $\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$ en image...

En comparant les aires des deux triangles rectangles et du secteur correspondant dans la figure 10, on obtient

$$\frac{1}{2}(\cos x)(\sin x) \leq \frac{x}{2} \times 1^2 \leq \frac{1}{2} \times 1 \times (\tan x)\Big(= \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}\Big).$$

En divisant l'inégalité

$$\frac{1}{2}(\cos x)(\sin x) \leq \frac{x}{2} \times 1^2 \leq \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}$$

par $\frac{1}{2}\sin x$ (qui reste non nul dans un voisinage de 0), on obtient

$$\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Puisque $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$, nous avons aussi $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$ (pourquoi ?), et le théorème du sandwich montre que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Par conséquent, on a aussi (vous pouvez de nouveau justifier ?)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Nous vous laissons finalement comme très bon exercice la vérification de la conservation des inégalités après passage à la limite.

Théorème 4.24 (conservation des inégalités)**.** *Soient* $f, g : U \to \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, *et* $a \in \operatorname{adh}(U \cap B)$. *Supposons que*
– $\exists \delta > 0$ *tel que* $f(x) \leq g(x)$ *pour tout* $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap U \cap B$ *;*
– $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in B}} f(x)$ *et* $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in B}} g(x)$ *existent dans* $\mathbb{R}$.
Alors $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in B}} f(x) \leq \lim_{\substack{x\to a\\ x\in B}} g(x)$.

Limites infinies et limites à l'infini

Nous avons vu que certaines suites réelles non bornées tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$. Nous allons étendre de manière analogue la notion de limite infinie en un point.

Considérons par exemple $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{(x-2)^2}$.

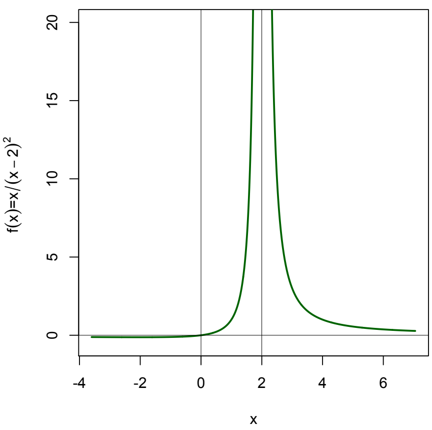


FIGURE 11 – $x \mapsto \frac{x}{(x-2)^2}$.

Comment formaliser le fait que la limite de f (dans $B = \mathbb{R}$) pour $x \to 2$ vaut $+\infty$. Cela ne rentre pas dans le cadre de la définition 4.8.

Définition 4.25. Soient $f\colon U \to \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{adh}(U \cap B)$. La *limite de f dans B lorsque x tend vers a vaut* $+\infty$ si pour tout $R > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in U \cap B$ et $|x - a| < \delta$ alors $f(x) > R$.

Dans ce cas nous écrivons $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to a$ dans B ou

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x) = +\infty.$$

Si

$$\forall R > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in U \cap B : |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -R,$$

on dit que f tend vers $-\infty$ en a dans B et on écrit $f(x) \to -\infty$ lorsque $x \to a$ dans B ou

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x) = -\infty.$$

Les cas particuliers $B = \mathbb{R}$, $B = (-\infty, a)$, $B = (a, +\infty)$, et $B = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ livrent respectivement les concepts de limites infinies standard, à gauche, à droite, et pointée.

Dès que l'une de ces limites existe et est infinie, on dira que f admet une asymptote verticale en $x = a$. Il s'agit de la droite d'équation $x = a$. Par exemple, pour $f : \mathbb{R}\setminus\{2\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{x-2}$, on a

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty, \quad \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$$

mais les limites pointées et standard n'existent pas. En particulier, f admet une asymptote verticale en $x = 2$.

Exercice 4.26. Formuler l'existence des limites infinies en terme de suites.

Exercice 4.27. Écrire les règles de calcul des limites infinies. Attention aux cas d'indétermination.

Lorsque le domaine d'une fonction réelle est non borné, on peut également s'interroger sur l'existence des limites lorsque $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{x-2}$. On est tenté d'écrire

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

Définition 4.28. Soit $f\colon U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où $\sup U = +\infty$. Nous disons que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K > 0$ tel que pour tout $x \in U$ tel que $x > K$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Dans ce cas nous écrivons que $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to +\infty$ ou bien

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell.$$

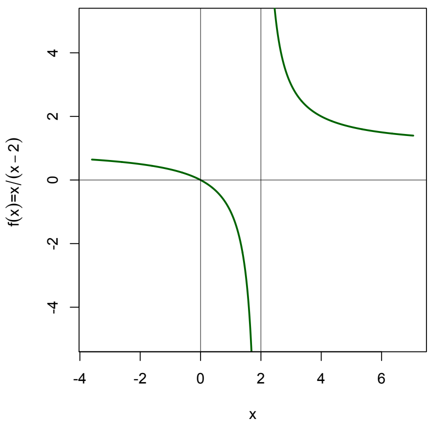


FIGURE 12 – $x \mapsto \frac{x}{x-2}$

De façon analogue, on définit la limite en $-\infty$.

Définition 4.29. Soit $f \colon U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où $\inf U = -\infty$. Nous disons que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $-\infty$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K > 0$ tel que pour tout $x \in U$ tel que $x < -K$, on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Dans ce cas nous écrivons que $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to -\infty$ ou bien

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell.$$

Dès que l'une de ces limites existe, on dira que f admet une asymptote horizontale (la droite $D \equiv y = \ell$) en $+\infty$ ou en $-\infty$. Ici, on ne peut pas définir des limites à gauche, à droite ou pointées. On ne peut s'approcher de $+\infty$ et de $-\infty$ que d'un seul côté !

Exercice 4.30. Définir les variantes

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Exercice 4.31. Formuler l'existence des limites à l'infini en terme de suites.

Exercice 4.32. Écrire les règles de calcul des limites à l'infini.

Exemples 4.33. 1. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/(1+x)$ tend vers 1 lorsque $x \to +\infty$. Fixons $\varepsilon > 0$. Observons que

$$|\frac{1}{1+x} - 1| = |\frac{1}{1+x}| < \varepsilon$$

dès que $x > R > \max(0, (1-\varepsilon)/\varepsilon)$.

2. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ car $x^2 > R$ dès que $x > \sqrt{R}$.

4.2 Définition de la continuité

Intuitivement, une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue si on peut dessiner son graphe sans lever son stylo du papier. Le graphe a cette propriété si, lorsqu'on dessine le graphe autour de $(a, f(a))$, pour tout x suffisamment proche à a, $f(x)$ est suffisamment proche à $f(a)$.

Retenez le « slogan »

une fonction f est continue si un petit changement de x entraîne un petit changement de $f(x)$

qui traduit en mots la définition rigoureuse suivante.

> **Définition 4.34.** Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f\colon U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un voisinage de a. La fonction f est continue en a si
>
> $$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$
>
> Cela signifie donc que f est continue en a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in U$ satisfaisant $|x - a| < \delta$, on a $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Remarquons que cette définition exige trois choses :

1. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe ;

2. f est définie au point a ;

3. f prend en a la valeur de sa limite au point a.

Si on vous demande d'énoncer la définition de la continuité d'une fonction en un point dans un examen, il vous faudra aussi donner la définition de la limite si vous énoncer simplement « la fonction f est continue en a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. » Vous pouvez aussi donner directement la définition en termes de ε et δ !

Exemple 4.35.

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un voisinage de a . Supposons qu'elles sont continues en a. Il suit des règles de calcul des limites que

– $f+g$ est continue en a ;
– fg est continue en a ;
– Si $g(a) \neq 0$ alors f/g est continue en a.

On en déduit directement que tout polynôme est continu en tout point de $\mathbb{R}$.

2. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ (où $\lfloor x \rfloor$ est l'entier le plus grand tel que $\lfloor x \rfloor \leq x$).

   Pour $x \in [n, n+1)$, on a $f(x) = x - n$. Donc si $a \in (n, n+1)$,
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(x-n) = a - n = f(a)$$
   Donc f est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

   Par contre, quand $a \in \mathbb{Z}$, les limites de f en a à gauche et à droite ne sont pas égales (voir l'exemple 4.22). Donc la limite de f n'existe pas en $a \in \mathbb{Z}$ et par conséquent f n'est pas continue en a.

3. Nous donnons maintenant un exemple très pathologique. Il sert d'avertissement : la continuité n'est peut-être pas tout à fait ce à quoi vous vous attendiez...

   Définissons la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} \text{ si } x = \frac{p}{q} \text{ est rationnel, sous forme irréductible,} \\ 0 \text{ si x est irrationnel.} \end{cases}$$
   Cette fonction s'appelle *la fonction de Dirichlet*.

   Nous nous concentrons sur la restriction de f à l'intervalle $(0,1)$. Démontrons que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to a$ pour tout $a \in (0,1)$. Calculons
   $f(x) = \frac{1}{2}$ si $x = \frac{1}{2}$;
   $f(x) = \frac{1}{3}$ si $x = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$;
   $f(x) = \frac{1}{4}$ si $x = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$;
   $f(x) = \frac{1}{5}$ si $x = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$.

   En générale, $f(x) \geq 1/q$ si et seulement si $x = m/p$ ou $0 < m < p \leq q$. Il y a un nombre fini $c(q)$ de telles fractions. Par exemple, quand $q = 5$, on a $c(q) = 9$ (les 9 valeurs de $f(x)$ sont calculées ci-dessus).

   Nous allons démontrer que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to a$ pour tout $a \in (0,1)$. Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $q \in \mathbb{N}$ tel que $1/q < \varepsilon$. Pour tout $a \in (0,1)$, il existe $\delta > 0$ tel que $interooa - \delta, a + \delta$ ne continent aucun des $c(q)$ points où $f(x) \geq 1/q$ sauf éventuellement a lui-même. Donc pour tout point $x \in (0,1)$ tel que $|x - a| < \delta$, on a
$$|f(x)| = f(x) < \frac{1}{q} < \varepsilon.$$
   Il s'ensuit que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to a$ et nous avons donc démontré que f est continue en tout point irrationnel, mais discontinue en tout point rationnel ! Pouvez-vous dessiner cette fonction ? Vous devrez lever le stylo de votre feuille combien de fois ! ? !

4. Nous sommes encore un peu loin d'être capable de le démontrer avec les outils que nous avons introduit jusqu'ici, mais les fonctions élémentaires que vous avez rencontrées au secondaires sont continues : $\cos(x)$, $\sin(x)$, a^x et en particulier e^x. Nous ne pouvons pas encore démontrer leur continuité parce que nous n'avons pas en fait de définitions précises des ces fonctions pour l'instant. Par exemple, nous n'avons pas encore rigoureusement défini e^x (dans ce syllabus en tout cas) pour les valeurs irrationnels de x. La manière la plus simple de traiter ces fonctions est d'utiliser les séries, ce que nous ferons dans la deuxième partie du cours. Pour le moment vous pouvez supposer que $\sin(x)$, $\cos(x)$ et e^x sont continue en tout point.
5. La fonction $\tan(x)$ n'est pas continue partout. Où se trouvent les points de discontinuité ?

La caractérisation de la limite d'une fonction en a en terme de suites convergentes donne immédiatement le résultat suivant.

Proposition 4.36. *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un voisinage de a. Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$.*

Exemple 4.37. Soient $x \in interoo0,1$ irrationnel et (q_n) une suite de rationnels qui converge vers x. Nous savons que la fonction de Dirichlet est continue en x, donc $(f(q_n)) \to f(x) = 0$ lorsque $n \to \infty$. Si nous écrivons $q_n = a_n/b_n$ pour entiers $0 \leq a_n < b_n$, $f(q_n) = \frac{1}{b_n}$. Donc nous voyons que pour toute suite de rationnels $(a_n/b_n) \subset (0,1)$ qui converge vers un irrationnel, la suite de dénominateurs $b_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$.

Voilà une application théorique de la proposition 4.36. Il est aussi possible de donner une démonstration directement à partir de la définition de la continuité. Cette autre approche est un bon exercice pour vous entraîner.

Théorème 4.38. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un voisinage de a et $g : V \to \mathbb{R}$ un fonction définie sur un voisinage de $f(a)$ qui contient $f(U)$. Supposons que f est continue en a et que g est continue en $f(a)$. Alors la fonction composée*

$$g \circ f : U \to \mathbb{R} : x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

est continue en a.

Démonstration. Soit $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ une suite qui converge vers a. Alors, par continuité de f en a, $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$ et donc, par continuité de g en $f(a)$, $(g(f(x_n))$ converge vers $g(f(a))$. On en déduit que $((g \circ f)(x_n))$ converge vers $(g \circ f)(a)$ et nous voyons donc que $g \circ f$ est continue. $\square$

Nous terminons notre discussion de la définition de continuité en précisant la définition de la continuité à gauche et de la continuité à droite en un point.

Définition 4.39. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f\colon U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un voisinage à droite de a.

Nous disons que f est continue à droite en a si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

De même, si f est définie sur un voisinage à gauche de a, nous disons que f est continue à gauche en a si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a).$$

Exemple 4.40. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(x) = x - n$ sur $[n, n+1[$. Donc

$$\lim_{x \to n+} f(x) = 0 = f(n)$$

et f est continue à droite en tout point $n \in \mathbb{Z}$. En revanche,

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = 1 \neq f(n),$$

donc f n'est pas continue à gauche en tout point $n \in \mathbb{Z}$.

4.3 Théorème des bornes atteintes

Les fonctions continues possèdent des propriétés importantes que nous décrivons dans les prochaines sections. Les résultats concernent les fonctions continues définies dans un intervalle fermé $[a, b]$.

D'un certain point de vue, ces propriétés confirment rigoureusement que notre image intuitive d'une fonction continue (à savoir que son graphe n'a pas de « trou ») est tout à fait justifiée. Remarquons aussi que l'hypothèse que f est continue sur un intervalle exclue les fonctions pathologique comme celle de Dirichlet ci-dessus, qui est continue en tout point irrationnel mais pas en les points rationnels. En fait, les résultats que nous démontrerons accomplissent plus que ça. En précisant nos idées intuitives, les résultats ci-dessous les rendent plus puisantes, du moins c'est ce que nous espérons montrer.

Définition 4.41. Une fonction $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite *continue* si elle est continue en tout point $c \in (a, b)$, continue à droite en a et continue à gauche en b.

Théorème 4.42 (Théorème des bornes atteintes.)**.** *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors*

1. *f est bornée ;*
2. *f atteint ses bornes.*

Plus précisément, le premier point dit qu'il existe A, B tel que $A \leq f(x) \leq B$ pour tout $x \in [a,b]$. La deuxième assertion est strictement plus forte ; elle dit qu'il existe $c_1, c_2 \in [a,b]$ tel que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ pour tout $x \in [a,b]$.

Démonstration. Nous raisonnons par l'absurde afin de démontrer que f est bornée.

Supposons que f n'est pas majorée. Donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $f(x_n) > n$. La suite $(x_n) \subset [a,b]$ et bornée est donc, par le théorème de Bolzano–Weierstrass, possède une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers un point $x \in \mathbb{R}$.

Or, $a \leq x_{n_k} \leq b$ pour tout k donc $a \leq x \leq b$. Par la continuité de f en x, il s'ensuit que $f(x_{n_k}) \to f(x)$. Mais par construction de la suite (x_n), $f(x_{n_k}) \to \infty$ ce qui nous donne une contradiction. La démonstration que f est minorée suit le même genre d'arguments.

Nous démontrons à présent que f atteint ses bornes. Nous raisonnons encore par l'absurde. Soit

$$A = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

Nous savons par la première partie que f est majorée et donc ce supremum est fini. Supposons qu'il n'existe pas de $c \in [a,b]$ tel que $f(x) = A$. Définissons une nouvelle fonction $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{1}{A - f(x)}.$$

Par les règles de calcul des limites, g est continue. Donc, par la première partie de cette démonstration, g est bornée. On en déduit l'existence de $K > 0$ tel que pour tout $x \in [a,b]$,

$$\frac{1}{A - f(x)} \leq K.$$

Puisque $A - f(x) > 0$ et $K > 0$, ceci implique que pour tout $x \in [a,b]$,

$$f(x) \leq A - \frac{1}{K},$$

ce qui contredit le fait que A est le supremum de $\{f(x) : x \in [a,b]\}$.

La démonstration que f atteint sa borne inférieure se déduit d'arguments similaires. $\square$

Avertissement : la fonction $f\colon interoo0,1 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue mais pas bornée. Cela ne contredit en rien le théorème des bornes atteintes car il faut que l'intervalle de définition de la fonction soit fermé, et donc en particulier qu'il contienne ses extrémités.

4.4 Théorème de la valeur intermédiaire

Il est intuitivement clair que si le graphe d'une fonction continue « démarre » en dessous d'une droite horizontale et se termine au dessus de cette droite, il doit croiser la droite quelque part. Nous démontrerons ce fait rigoureusement dans cette section.

Cette observation pourrait vous sembler triviale. Nous donnerons après quelques applications quand même un peu surprenantes.

Théorème 4.43 (Théorème de la valeur intermédiaire.)**.** *Soit $f\colon intercca, b \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$ strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in (a, b)$ tel que $f(c) = \gamma$.*

Démonstration. Nous supposons que $f(a) < \gamma < f(\ell)$, le cas $f(\ell) < f(a)$ se déduisant d'arguments similaires.

Soit
$$S = \{x : x \in [a, b] \text{ et } f(x) < \gamma\}.$$
Cet ensemble S est non-vide puisque $a \in S$ et S est majoré par b. Donc S possède un supremum. Écrivons $c = \sup S$. Evidemment $c \in intercca, b$. Nous démontrerons que $f(c) = \gamma$ en raisonnant par l'absurde. L'idée est que si $f(c) < \gamma$ alors il existe un point x légèrement plus grand que c tel que $f(x)$ est encore plus petit que γ, ce qui contredira le fait que c majore S. Et si $f(c) > \gamma$, nous montrerons qu'en fait $f(x) > \gamma$ à partir d'un point légèrement plus petit que c. Cette fois nous obtiendrons une contradiction au fait que c est le plus petit majorant de S.

Nous en venons aux détails. Supposons d'abord que $f(c) < \gamma$. Soit $\varepsilon = \gamma - f(c) > 0$. Puisque f est continue en c, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in intercca, b$ satisfaisant $|x - c| < \delta$, on a $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Autrement dit pour $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap intercca, b$, on a
$$f(c) - \gamma < f(x) - f(c) < \gamma - f(c)$$
et donc pour une telle valeur x, $f(x) < \gamma$. Alors il existe un point $y > c$ de $intercca, b$ satisfaisant $f(y) < \gamma$, ce qui contredit le fait que c majore S.

Supposons maintenant que $f(c) > \gamma$. Soit $\varepsilon = f(c) - \gamma > 0$. Puisque f est continue en c, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in [a, b]$ et $|x - c| < \delta$, alors $|f(x) - f(c)| < f(c) - \gamma$. Prenons δ suffisamment petit que $c - \delta \in intercca, b$. Puisque $f(c) > \gamma$, $c \neq a$. Or pour $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap intercca, b$, on a

$$\gamma - f(c) < f(x) - f(c) < \gamma - f(c)$$

et donc pour un tel x, $f(x) > \gamma$. Puisque c majore S, nous avons que $f(x) \geq \gamma$ pour tout $x > c$. Nous voyons donc que $f(x) \geq \gamma$ pour tout $x \in (c - \delta, b]$. Alors $c - \delta/2$ majore S aussi. Ceci contredit le fait que c est le plus petit majorant de S.

Nous avons exclu les possibilités $f(c) < \gamma$ et $f(c) > \gamma$; donc $f(c) = \gamma$ est la seule possibilité qui reste. $\square$

Exemple 4.44.

1. Soit $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ continue et telle que $f(0) = f(2\pi)$. Nous pouvons penser à f comme une fonction définie sur le cercle (l'argument est donc un angle) et à valeur dans $\mathbb{R}$. Nous démontrons qu'il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $f(\theta) = f(\theta + \pi)$. C'est à dire qu'il existe deux antipodes du cercle où f prend la même valeur. Pour le voir, définissons une fonction $g\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$ par

   $$g(\theta) = f(\theta) - f(\theta + \pi).$$

   Si on considère f comme une fonction sur le cercle, g donne la différence entre les valeurs de f en l'angle θ et le point antipode de θ.

   Il est facile de vérifier que g est continue (exercice !). Or, $g(0) = f(0) - f(\pi)$ et $g(\pi) = f(\pi) - f(2\pi) = f(\pi) - f(0) = -g(0)$.

   Si $g(0) = 0$, alors $f(0) = f(\pi)$ et nous avons fini. Si $g(0) \neq 0$, alors $g(0)$ et $g(\pi)$ sont de signe différèrent. Alors le théorème de la valeur intermédiaire nous donne $\theta \in [0, \pi]$ tel que $g(\theta) = 0$, c'est à dire tel que $f(\theta) = f(\theta + \pi)$.

   Pour une application amusante de ce résultat, considérons la température sur la surface de la terre. Sur chaque cercle de longitude (et en supposant que la température est une fonction continue !) il existe deux points antipodaux à la même température, même si pour un point il fera jour et pour l'autre il fera nuit !

2. Soit $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. En faisant un dessin, il semble clair quil existe un point $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$. Un tel point est dit *un point fixe* de f. Géométriquement, il s'agit d'un point où le graphe de f croise la diagonale d'équation $y = x$.

   On peut démontrer rigoureusement qu'il existe un point fixe un appliquant le théorème de la valeur intermédiaire à la fonction $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ donnée par $g(x) = f(x) - x$. A vous de donner les détails !

3. Soit $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ un polynôme de dégrée n impair. Nous démontrons qu'il existe y tel que $p(y) = 0$ et, de plus nous estimons la valeur de la racine.

   Intuitivement, pour $x > 0$ très grand, le terme x^n domine les autres et donc

   $$p(x) \sim x^n > 0.$$

   Pour $x < 0$ avec $|x|$ très grand, x^n domine encore une fois et donc

   $$p(x) \sim x^n < 0.$$

Donc, par le théorème de la valeur intermédiaire, il doit exister y entre ces deux régions où $p(y) = 0$. Il faut maintenant justifier soigneusement ces observations. Soit

$$K = |a_1| + \cdots + |a_n|$$

Quand $|x| > 1$, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{p(x)}{x^n} - 1\right| &\leq \left|\frac{a_1}{x}\right| + \left|\frac{a_2}{x^2}\right| + \cdots + \left|\frac{a_n}{x^n}\right| \\ &\leq \frac{|a_1 + |a_2| + \cdots + |a_n|}{|x|} \\ &\leq \frac{K}{|x|}.\end{aligned}$$

Alors si $|x| > \max\{K, 1\}$, il vient $|p(x)/x^n - 1| < 1$ et donc $p(x)$ a le même signe que x^n. Il suit du théorème de la valeur intermédiaire qu'il existe une racine de p dans l'intervalle $[-M, M]$ où $M = \max(|a_1| + \cdots + |a_n|, 1)$.

4.5 Théorèmes de l'intervalle et de la réciproque

Une application des théorèmes des bornes atteintes et de la valeur intermédiaire est que l'image d'un intervalle par une fonction continue est encore un intervalle.

Théorème 4.45 (Théorème de l'intervalle). *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I. Alors $f(I) \subset \mathbb{R}$ est aussi un intervalle.*

Si $I = [a, b]$, alors $f(I)$ est un intervalle de la même forme (fermé). C'est à dire qu'il existe $c, d \in \mathbb{R}$ tel que $f(I) = [c, d]$.

Démonstration. Prenons $\alpha, \beta \in f(I)$ avec $\alpha < \beta$. Nous devons démontrer que $[\alpha, \beta] \subset f(I)$. Or, il existe $p, q \in I$ tel que $f(p) = \alpha$, et $f(q) = \beta$. Supposons que $p < q$ (le cas contraire est traité de façon similaire). Nous appliquons le théorème de la valeur intermédiaire à f sur l'intervalle $[p, q]$ pour déduire que f prend toute valeur entre α et β. Donc pour tout $\alpha < \beta$ avec $\alpha, \beta \in f(I)$, nous avons que $[\alpha, \beta] \subset f(I)$. D'ici il est facile de vérifier que $f(I)$ est un intervalle. (Vous l'avez déjà fait pendant vos séances d'exercices !)

Nous traitons maintenant le cas d'un intervalle fermé $I = [a, b]$. Par le théorème des bornes atteintes, il existe $p, q \in [a, b]$ tel que $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ pour tout $x \in [a, b]$. Donc par l'argument ci-dessus, $f(I) = [c, d]$. $\square$

Quand I ne contient pas $\sup I$ ou $\inf I$, l'image $f(I)$ n'est pas nécessairement du même « type » que I. Par exemple $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ a comme image $[0, 1)$.

Pour la prochaine application des théorèmes des bornes atteintes et de la valeur intermédiaire, nous avons besoin de la définition d'une fonction monotone.

Définition 4.46. Soit $f\colon E \to \mathbb{R}$ définie sur un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$.

Elle est dite *strictement croissante* si pour tout $x, y \in E$ avec $x < y$, nous avons $f(x) < f(y)$.

Elle est dite *strictement décroissante* si pour tout $x, y \in E$ avec $x < y$, nous avons $f(x) > f(y)$.

Elle est dite simplement *croissante* ou *décroissante* si $f(x) \leq f(y)$ ou $f(x) \geq f(y)$ respectivement.

Finalement, f est dite *strictement monotone* si f est strictement croissante ou strictement décroissante et *monotone* si f est croissante ou décroissante.

Théorème 4.47 (Théorème de la réciproque)**.** *Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. Alors f est injective et la réciproque $f^{-1}\colon f(I) \to I$ est aussi continue.*

Démonstration. Soit $x \neq y$, par la monotonicité de f, $f(x) \neq f(y)$. Donc f est injective.

Nous pouvons donc définir la réciproque $f^{-1}\colon f(I) \to \mathbb{R}$. Pour le reste de la démonstration nous supposons que f est strictement croissante, le cas strictement décroissante étant similaire.

Nous savons déjà que $f(I)$ est un intervalle. Soit p un point intérieur de $f(I)$. Nous allons démontrer que f^{-1} est continue en p. Écrivons $f(q) = p$. Si I contient une de ses extrémités, leurs images sont les extrémités de $f(I)$ parce que f est strictement monotone. Alors q n'est pas un extrémité de I.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $(q - \varepsilon, q + \varepsilon) \in I$. Il suffit de démontrer l'existence d'un $\delta > 0$ pour de tels ε parce qu'un δ qui satisfait la définition pour une valeur ε la satisfait aussi pour toute valeur ε plus grande. Or, f envoie l'intervalle $J = [q - \varepsilon, q + \varepsilon]$ sur un intervalle de la forme $[c, d]$. Puisque f est strictement monotone, $c < p < d$. Soit $\delta = \min(p - c, d - p)$. Alors $\delta > 0$ et $[p - \delta, p + \delta] \subset f(J)$. Donc $f^{-1}([p - \delta, p + \delta]) \subset [q - \varepsilon, q + \varepsilon]$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons trouvé $\delta > 0$ tel que si $|x - p| < \delta$ alors $|f^{-1}(x) - f^{-1}(p)| < \varepsilon$. Donc f^{-1} est continue en p.

La continuité à droite ou à gauche aux extrémités éventuelles de $f(I)$ se démontre de façon similaire. $\square$

Remarquons que la condition que f soit strictement monotone est équivalente à la condition que $f\colon I \to f(I)$ soit bijective. A vous de le démontrer. Ceci est-il encore vrai si f n'est pas supposée continue ? Et qu'en est-il si le domaine de f n'est pas un intervalle ?

Exemple 4.48. La fonction $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ définie par $f(x) = x^2$ est une bijection continue, strictement monotone. Donc le théorème de la réciproque nous dit que la réciproque f^{-1} est continue. Autrement dit, la fonction $[0,\infty) \to [0,\infty)$ donné par $y \to \sqrt{y}$ est continue.

Constatons que nous avons maintenant une démonstration très brève de l'existence d'un réel unique $x > 0$ tel que $x^2 = 2$.

Exercice 4.49. Est-ce que la réciproque d'une fonction continue strictement monotone est, elle aussi, strictement monotone ?

4.6 Continuité uniforme

La continuité d'une fonction f en a est une propriété *locale*. Cela ne concerne que le comportement de f près de a. Nous étudierons dans cette section une version *globale* de continuité, la continuité *uniforme*.

> **Définition 4.50.** Soient $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble et $f\colon E \to \mathbb{R}$ une fonction. La fonction f est *uniformément continue* sur E si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in E$ satisfaisant $|x - y| < \delta$, nous avons $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Pour la continuité ordinaire, nous parlons de la continuité en a. Pour a fixé, nous devons trouver pour tout $\varepsilon > 0$ un $\delta > 0$ tel que blablabla. Le nombre δ dépend en général de ε et peut dépendre aussi de a. Pour la continuité uniforme, il n'y a pas de point « a » précisé dans la définition. Étant donné $\varepsilon > 0$, le $\delta > 0$ doit marcher quelque soit les points $x, y \in E$. Donc cela revient à demander la continuité ponctuelle plus le fait que le δ trouvé dans la définition de continuité ponctuelle ne dépende en réalité pas du point considéré.

Évidemment une fonction uniformément continue est aussi continue.

Même si la définition de la continuité uniforme est peut-être superficiellement semblable à celle de la continuité, elle a un caractère tout à fait différent.

La première différence entre la continuité et la continuité uniforme se présente quand on considère l'interprétation de ε et δ en termes du graphe de f.

Pour $\varepsilon > 0$ fixe, plus la pente du graphe est raide, plus le δ doit être petit. Intuitivement, alors, une fonction est uniformément continue si la pente de son graphe est globalement bornée.

Exemple 4.51.

1. La fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x$ est uniformément continue. Étant donné $\varepsilon > 0$, nous prenons $\delta = \varepsilon$.
2. Soit $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$.

   Dessin.

   Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est strictement monotone, c'est une bijection entre les intervalles $(\sqrt{x^2 - \varepsilon}, \sqrt{x^2 + \varepsilon})$ et $(x^2 - \varepsilon, x^2 + \varepsilon)$. Le coté droit de cet intervalle est plus près de x que le coté gauche. Si nous écrivons $\delta(x) = \sqrt{x^2 + \varepsilon} - x$, nous avons donc que $(x - \delta(x), x + \delta(x))$ est l'intervalle ouvert le plus grand, centré en x qui est envoyé dans $(x^2 - \varepsilon, x^2 + \varepsilon)$.

   Or, $\delta(x) = \sqrt{x^2 + \varepsilon} - x = x(1 - \varepsilon/x)^{1/2} \to 0$ lorsque $x \to \infty$. Donc il n'est pas possible de choisir δ indépendamment de x dans la définition de continuité et donc f n'est pas uniformément continue.

   Par contre, si nous considérons le restriction de f a un intervalle borné I, nous pouvons choisir δ indépendamment de x : il suffit de choisir $\delta = \delta(m)$ où m est un majorant de I.

   C'est exemple nous montre deux choses.

   1. Être uniformément continue est plus contraignant qu'être simplement continue.

   2. Pour parler de la continuité uniforme d'une fonction il faut aussi préciser le domaine. Si on change le domaine d'une fonction on perd ou on gagne peut-être de la continuité uniforme.

Nous donnons maintenant une caractérisation de la continuité uniforme en termes de suites. Commençons par une définition.

Définition 4.52. Deux suites $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$ sont dites *équivalentes* si $|x_n - y_n| \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Si (x_n) est convergente alors (y_n) est équivalente à (x_n) si et seulement si elle converge vers la même limite. (Vous pouvez fournir une démonstration ?) Mais deux suites divergentes peuvent être équivalentes.

Proposition 4.53. *Soit $f: E \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. La fonction f est uniformément continue si et seulement si pour tout couple de suites équivalentes $(x_n), (y_n) \subset E$, les suites $(f(x_n))$, $(f(y_n))$ sont équivalentes.*

Démonstration. Supposons d'abord que f est uniformément continue. Soient $(x_n), (y_n) \in E$ deux suites équivalentes. Soit $\varepsilon > 0$. Il faut trouver N tel que pour tout $n \geq N$, $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$.

Or, f est uniformément continue donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in E$ avec $|x-y| < \delta$ nous avons que $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. De plus, (x_n) et (y_n) sont équivalentes. Donc il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $|x_n - y_n| < \delta$. Alors pour une telle valeur n, $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$. Donc $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ sont équivalentes. Dans l'autre sens, supposons que pour tout couple $(x_n), (y_n) \subset E$ de suites équivalentes, $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ sont aussi équivalentes. Nous démontrerons que f est uniformément continue en raisonnant par l'absurde.

Si f n'est pas uniformément continue, alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel qu'aucun $\delta > 0$ ne satisfait la définition. Donc $\delta = 1/n$ ne marche pas quelque soit l'entier $n \geq 1$. Alors pour tout entier $n \geq 1$, il existe $x_n, y_n \in E$ avec $|x_n - y_n| < 1/n$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$. Donc $|x_n - y_n| \to 0$ et alors (x_n), (y_n) sont équivalentes mais $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0 > 0$ ne converge pas vers zéro. C'est une contradiction. $\square$

Cette caractérisation est très utile pour démontrer qu'une fonction donnée n'est pas uniformément continue. L'idée : en considérant le graphe, trouvez un point où la pente devient « infiniment raide » ; puis trouvez deux suites équivalentes qui converge vers ce point mais avec des vitesses différentes (adaptées à la fonction) tel que leurs images ne sont pas équivalentes. Quelques exemples devraient rendre l'idée plus claire.

Exemple 4.54.

1. Soit $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ donné par $f(x) = 1/x$. La pente du graphe de f devient infinie en 0. Soient $x_n = 1/n$ et $y_n = 2/n$. On a $|x_n - y_n| = 1/n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Donc (x_n) et (y_n) sont équivalentes. Par contre, $f(x_n) = n$ et $f(y_n) = n/2$, donc $|f(x_n) - f(y_n)| = n/2 \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. Donc $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ ne sont pas équivalentes et f n'est pas uniformément continue.
2. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donné par $f(x) = x^2$. Nous donnons une autre démonstration que f n'est pas uniformément continue. La pente du graphe de f devient infinie en $+\infty$. Soient $x_n = n$ et $y_n = n + 1/n$. Alors $|x_n - y_n| = 1/n \to \infty$. Par contre, $f(x_n) = n^2$ et $f(y_n) = n^2 + 2n + n^{-2}$. Donc $|f(x_n) - f(y_n)| = 2n + n^{-2} \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. Il en découle que f n'est pas uniformément continue.

Malgré le fait que la continuité et la continuité uniforme sont des choses différentes, il y a une situation où ces situations coïncident : *quand le domaine de la fonction est un intervalle fermé.*

Théorème 4.55. *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Nous raisonnons par l'absurde. Supposons que f n'est pas uniformément continue. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel qu'il n'y a pas de $\delta > 0$ qui marche dans la définition. Alors pour tout entier $n \geq 1$ il existe $x_n, y_n \in [a,b]$ tels que $|x_n - y_n| < 1/n$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$.

Or, $(x_n), (y_n) \subset [a,b]$ sont des suites bornées donc, par le théorème de Bolzano–Weierstrass, elles possèdent des sous-suite convergentes. Nous allons trouver une suite croissante d'entiers $m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$ tel que les sous-suites (x_{m_k}) et (y_{m_k}) convergent toutes les deux.

Soit (x_{n_k}) une sous-suite convergente de (x_n). Nous considérons maintenant la sous-suite correspondante (y_{n_k}) de (y_n). Puisque (y_{n_k}) est une suite borné, elle possède aussi une sous-suite convergente. Donc nous avons trouvé une suite croissante d'entiers $m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$ tel que (y_{m_k}) converge. Puisque (x_{m_k}) est une sous-suite de la suite convergente (x_{n_k}), elle est aussi convergente. De plus, $|x_n - y_n| \to 0$. Donc $\lim_{k\to\infty} x_{m_k} = \lim_{k\to\infty} y_{m_k}$. Notons cette limite p.

Puisque toutes les suites se trouvent dans $[a,b]$ il s'ensuit que $p \in [a,b]$. Or, par la continuité de f en p, $f(x_{m_k}) \to f(p)$ et $f(y_{m_k}) \to f(p)$ lorsque $k \to \infty$. Donc $|f(x_{m_k}) - f(y_{m_k})| \to 0$, ce qui contredit le fait que $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ pour tout n. □

Nous terminons notre discussion des fonctions uniformément continues avec un résultat concernant le prolongement continu d'une fonction uniformément continue.

Théorème 4.56. *Soit $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Alors il existe un prolongement continu $\bar{f}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ de f, c'est-à-dire que $\bar{f}$ est continue à droite en a, à gauche en b et que $\bar{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in (a,b)$.*

Constatons que la continuité, seule, ne suffit pas, comme le montre l'exemple $x \mapsto 1/x$ sur $(0,1)$.

Démonstration. Nous démontrons qu'on peut définir $f(\ell)$ tel que f devient continue à gauche en b, le cas du point a se traite de façon similaire. Soit $(x_n) \subset (a,b)$ une suite qui converge vers b. Nous voulons démontrer que $(f(x_n))$ est de Cauchy et donc converge aussi.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est uniformément convergente, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in (a,b)$ avec $|x-y| < \delta$, nous avons $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Étant convergente, (x_n) est une suite de Cauchy. Donc il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $|x_n - x_m| < \delta$. Alors pour tout $n \geq N$, nous avons $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Donc $(f(x_n))$ est de Cauchy et par conséquent converge. Nous décidons que $f(b)$ est la limite de cette suite.

Il reste à vérifier que f est maintenant continue à gauche on b. Nous le ferons en démontrant que la limite de $(f(y_n))$ ne dépend pas du choix particulier d'une suite (y_n) qui converge vers b. Si $(y_n) \in (a,b)$ est une autre suite qui converge vers b alors (x_n) et (y_n) sont équivalentes. Or l'image d'un couple de suites équivalentes par une fonction uniformément continue est encore un couple de suites équivalents. Alors $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ sont équivalente. Mais $f(x_n) \to f(b)$ lorsque $n \to \infty$, donc $f(y_n) \to f(b)$ lorsque $n \to \infty$ aussi. □

4.7 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Dans cette section nous traitons la continuité des fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, *qui prennent leurs valeurs dans* $\mathbb{R}^n$. Intuitivement, on peut penser qu'une telle fonction représente un chemin dans $\mathbb{R}^n$ voir une « courbe ».

Notre discussion de la continuité se base sur la notion de la distance entre deux points de $\mathbb{R}$. Pour discuter la continuité des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, nous aurons donc besoin de la distance entre deux points de $\mathbb{R}^n$.

Définition 4.57. Étant donné deux points $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, la distance de x à y se note $\|x - y\|$ et est donnée par

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

Cette définition est inspirée par le théorème de Pythagore qui nous assure en fait que dans le plan $\mathbb{R}^2$, $\|x-y\|$ correspond bien à la distance de x à y. Lorsque $n = 1$, on retrouve bien que la distance entre deux points x et y est la valeur absolue de la différence $x - y$.

La distance dans $\mathbb{R}^n$ est étroitement lié au produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ dont nous aurons besoin plus tard.

Définition 4.58. Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$. Leur *produit scalaire* est le nombre réel donné par

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Donc $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ et, plus généralement, $\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y\rangle$. Un autre lien entre la distance et le produit scalaire est fournit par l'inégalité suivante, qui joue un rôle très important dans l'étude de la géométrie de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 4.59 (Inégalité de Cauchy–Schwarz)**.** *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.*

Dire que x et y sont colinéaires veut dire que les deux points se trouvent sur la même droite dans $\mathbb{R}^n$ qui passe par l'origine, i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$.

Démonstration. Les deux cotés de l'inégalité sont positifs, donc il suffit de démontrer que

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2,$$

ce qui revient à

$$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2.$$

Soit $t \in \mathbb{R}$ et considérons la fonction $t \mapsto F(t) = \sum (x_j + ty_j)^2$. Comme somme de carrés, $F(t) \geq 0$ pour tout t, ce qui nous donne

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^2 + 2t \sum_{j=1}^{n} x_j y_j + t^2 \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \geq 0$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit que l'équation quadratique $F(t) = 0$ ne peut jamais avoir deux racines réelles et donc que le discriminant « $b^2 - 4ac$ » est négatif. Ici « b »vaut $2 \sum x_j y_j$ alors que « a »vaut $\sum y_j^2$ et « c » vaut $\sum x_j^2$. L'inégalité $b^2 - 4ac \leq 0$ est précisément l'inégalité de Cauchy–Schwarz.

Pour traiter le cas d'égalité, constatons d'abord que si $x = ty$ pour $t \in \mathbb{R}$, alors $|\langle x, y\rangle| = |t||x|^2 = |x||y|$ et donc on a égalité dans l'inégalité de Cauchy–Schwarz. Inversement, si $|\langle x, y\rangle| = |x||y|$, cela veut dire qu'il existe une solution à l'équation $F(t) = 0$, où $F(t) = \sum (x_j + ty_j)^2$. Le fait que $F(t) = 0$ entraîne que chaque terme dans la somme est nul, c'est à dire que pour tout j, $x_j = -ty_j$, ou autrement dit $x = -ty$ et x et y sont proportionnels. $\square$

Après cette petite digression sur la distance dans $\mathbb{R}^n$, nous pouvons donner la définition de la limite d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Définition 4.60. Un ensemble $U \subset \mathbb{R}^m$ est dit un voisinage de $a \in \mathbb{R}^m$ s'il existe $r > 0$ tel que si $\|x - a\| < r$ alors $x \in U$. Autrement dit, U contient tout point qui se trouve à une distance inférieure à r de a.

Définition 4.61. Soit $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^m$. Nous disons que $f(x)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}^n$ lorsque x tend vers a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ tel que si $x \in U$ avec $\|x - a\| < \delta$ alors $\|f(x) - \ell\| < \varepsilon$.

Dans ce cas nous écrivons que $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to a$ ou bien

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

Constatons que cette définition est *identique* à celle de la limite d'une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sauf qu'ici nous interprétons $\|x - a\|$ et $\|f(x) - \ell\|$ comme les distances dans $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement. De même, on peut définir la convergence d'une suite (x_k) d'éléments de $\mathbb{R}^n$. Vous pouvez vous même fournir les détails.

Nous reviendrons aux fonctions de plusieurs variables, c'est à dire de $\mathbb{R}^m$ à $\mathbb{R}^n$ plus tard. Pour le moment nous nous concentrons sur les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, c'est à dire d'une seule variable, mais à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Étant donné une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, on peut parler des limites à gauche et à droite, etc. Nous ne donnons pas de détails, vous pouvez vous entraîner à le faire.

On peut aussi « décomposer » une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ en composantes. Définissons n fonctions $f_1, \dots, f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)).$$

Le prochain résultat nous dit que la limite de f en a peut être étudiée « composante par composante ».

Lemme 4.62. *Soit $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ définie sur un voisinage $U \subset \mathbb{R}$ de $a \in \mathbb{R}$. La fonction f possède une limite en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si toutes les composantes $f_1, \dots, f_n\colon U \to \mathbb{R}$ possèdent une limite en $a \in \mathbb{R}$. Dans ce cas,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \left(\lim_{x\to a} f_1(x), \dots, \lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

C'est à dire que les composantes de la limite sont les limites des composantes.

Démonstration. Supposons d'abord que $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to a$ et écrivons $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $\delta > 0$ tel que si $|x-a| < \delta$, alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, ou autrement dit,

$$(f_1(x) - \ell_1)^2 + \dots + (f_n(x) - \ell_n)^2 < \varepsilon^2$$

Il s'ensuit que pour un tel x, et pour tout $j = 1, \dots, n$, on a $(f_j(x) - \ell_j)^2 < \varepsilon^2$ ou bien $|f_j(x) - \ell_j| < \varepsilon$. Donc $f_j(x) \to \ell_j$ lorsque $x \to a$.

Inversément, supposons que pour tout $j = 1, \dots, n$, $f_j(x) \to \ell_j$ lorsque $x \to a$. Écrivons $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_j > 0$ tel que si $|x-a| < \delta_j$, alors $|f_j(x) - \ell_j| < \varepsilon/\sqrt{n}$. D'ici il découle que si $|x-a| < \min\{\delta_j\}$ alors

$$\|f(x) - \ell\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |f_j(x) - \ell_j|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{n} + \dots + \frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2$$

et donc que $f(x) \to \ell$ lorsque $x \to a$. □

Définition 4.63. Soit $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ définie sur un voisinage $U \subset \mathbb{R}$ de $a \in \mathbb{R}$. La fonction f est dite continue en a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in U$ et $|x-a| < \delta$, alors $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.

Autrement dit, elle est continue en a si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

On peut parler de la continuité d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Est-ce que vous pouvez donner la bonne définition ? Nous nous concentrons sur les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ pour l'instant ; les fonctions de plusieurs variables seront traitées plus tard dans les notes.

Lemme 4.64. *Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et écrivons $f_1, \ldots, f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour décrire les composantes. La fonction f est continue en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si toutes ses composantes f_j sont continues en a.*

Démonstration. Ceci découle immédiatement du lemme 4.62 précédent. □

Grâce à ce lemme et aux règles de calcul nous pouvons trouver des nouvelles fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ à partir des fonctions connues.

Lemme 4.65. *Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions continues en $a \in \mathbb{R}$.*

1. *La fonction $\|f\|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $\|f\|(x) = \|f(x)\|$ est continue en a.*
2. *La fonction $f + g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ donnée par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ est continue en a.*
3. *La fonction $hf\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ donnée par $(hf)(x) = h(x)f(x)$ est continue en a.*

Nous laissons les démonstrations en guise d'exercices.

Le fait que la continuité de $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ revient à la continuité de ses composantes implique que des résultats que nous avons vu pour les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'étendent facilement aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Voilà un exemple, qui est la traduction du théorème des bornes atteints.

Proposition 4.66. *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continue. Alors elle est bornée et elle atteint ses bornes. Plus précisément, il existe $p \in [a,b]$ tel que pour tout $x \in [a,b]$, $\|f(x)\| \leq \|f(p)\|$.*

Ici, la phrase « continue » sur $[a,b]$ veut dire continue en tout point intérieur, continue à droit en a et continue à gauche en b. Nous n'avons pas défini la continuité aux extrémités pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, mais il devrait être clair pour vous qu'il suffit de faire l'extension naturelle du lemme 4.64 pour la continuité à gauche et à droite.

Démonstration. Vu que f est continue, il suit du lemme 4.65 que la norme de f donne une fonction continue $\|f\|\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. La version originale du théorème de bornes atteints appliquée à $\|f\|$ implique qu'il existe $p \in [a,b]$ tel que $\|f(x)\| \leq \|f(p)\|$ pour tout x comme annoncé. $\square$

5 Fonctions dérivables

Nous abordons maintenant la dérivation des fonctions d'une seule variable.

5.1 Définition et propriétés de base

Définition 5.1. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert qui contient a. Elle est dite *dérivable en a* si la limite suivante existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Lorsque cette limite existe, on la note $f'(a)$ et ce nombre est appelé *la dérivée de f au point a*.

Si f est dérivable en tout point de I alors elle est dite *dérivable* et la fonction $f'\colon I \to \mathbb{R} : x \mapsto f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f.

Afin d'alléger l'écriture, nous dirons souvent « soit f une fonction dérivable en a » pour dire que $f\colon I \to \mathbb{R}$ est définie sur un intervalle ouvert I qui contient a et que f est dérivable en a.

Remarquons que nous pouvons prendre $h = x - a$ dans la limite qui définit la dérivée. Alors,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

qui veut dire que la limite dans le membre de gauche existe si et seulement si la limite dans le membre de droite existe et dans ce cas les deux limites sont égales. On pourra utiliser l'une ou l'autre écriture.

Rappelons aussi une autre notation, due à Leibniz, pour la dérivée de f en a

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a).$$

L'idée principale pour calculer la dérivée de f est de considérer une petite variation $\delta x = x - a$ de x et d'observer le changement $\delta f = f(x) - f(a)$ de f. La dérivée est la limite du quotient $\frac{\delta f}{\delta x}$ lorsque $\delta x \to 0$. Donc la notation de Leibniz nous rappelle en quelque sorte la définition de la dérivée.

Cette notation a des avantages et des désavantages en comparaison avec la notation $f'(a)$, qui est due à Newton. La notation de Leibniz rend plus simple de retenir certains résultats et calculs. Mais il est aussi tentant de traiter le numérateur et le dénominateur $\mathrm{d}f$ et $\mathrm{d}x$ séparément. Il existe une théorie (la théorie de formes différentielles) qui donne du sens aux quantités telles que $\mathrm{d}x$, mais ce sera pour un autre cours. Dans ce cours, le numérateur et le dénominateur de $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ n'apparaissent *jamais* séparément.

Exemple 5.2. Nous revenons aux exemples donnés tout au début du cours, que nous pouvons maintenant traiter d'une manière rigoureuse.

1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$$
Cette quantité tend vers $2a$ lorsque $h \to 0$ et donc nous voyons que f est dérivable en tout point et que la fonction dérivée est $f'(x) = 2x$.
2. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = |x|$. Alors f n'est pas dérivable en 0.
Dessin du graphe.
Pour le démontrer rigoureusement, constatons que
$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 0, \\ -1 & \text{si } h < 0. \end{cases}$$
Dès lors,
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1, \qquad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -1.$$
Vue que les limites à gauche et à droite sont différentes, la limite n'existe pas et donc f n'est pas dérivable en 0.

On peut également définir les dérivées d'ordre supérieur.

Définition 5.3. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert qui est dérivable en tout point. On peut définir la fonction dérivée $f'\colon I \to \mathbb{R}$. Si cette fonction est continue, alors on dit que f *est continûment dérivable* ou *de class* C^1 et on note $f \in C^1(I)$.

Si la fonction f' est elle-même dérivable en $a \in I$, on dit que f est *deux fois dérivable en* a et on écrit
$$f''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a}.$$

Dans la notation de Leibniz, la deuxième dérivée se note
$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(a).$$

Si la fonction f' est dérivable en tout point de I et si la fonction $f''\colon I \to \mathbb{R}$ est continue, on dit que f *est deux fois continûment dérivable* ou *de class* C^2 et on note $f \in C^2(I)$.

On procède ensuite par récurrence pour définir les dérivées d'ordre $n \geq 1$, d'une fonction f au point a :

$$f^{(n)}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a}$$

(en supposant que $f^{(n-1)} \colon I \to \mathbb{R}$ existe et que la limite qui définit $f^{(n)}(a)$ existe).

Dans la notation de Leibniz la n^{e} dérivée se note

$$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(a).$$

Si la fonction $f^{(n)}$ est continue, on dit que f *est n-fois continûment dérivable* ou *de class C^n* et on note $f \in C^n(I)$.

Finalement, $C^0(I)$ désigne l'ensemble de fonctions $f \colon I \to \mathbb{R}$ continues et $C^\infty(I)$ désigne les fonctions $f \colon I \to \mathbb{R}$ indéfiniment dérivables.

Exemple 5.4. Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \geq 0, \\ x^3 \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Pour $x > 0$, f est dérivable et $f'(x) = 2x$ (comme nous avons vu ci-dessus). Pour $x < 0$ f est dérivable et $f'(x) = 3x^2$ (démonstration laissée en guise d'exercice).

En $x = 0$, il faut considérer les limites à gauche et à droite.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x} = 0$$

et

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^3}{x} = 0$$

Donc f est aussi dérivable en 0. La fonction dérivée f' est

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \text{ si } x \geq 0, \\ 3x^2 \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Il est facile à vérifier que f' est continue, donc $f \in C^1(\mathbb{R})$. De plus, f' est dérivable en tout point a sauf à l'origine. Est-ce vous pouvez démontrer que f' n'est pas dérivable en 0 ?

Nous passons maintenant aux propriétés de base des fonctions dérivables.

Intuitivement, une fonction est dérivable en a si on peut dessiner la tangente à son graphe en $(a, f(a))$. Il semble logique que pour pouvoir dessiner la tangente, il faut que le fonction soit au moins continue. Ceci motive le résultat suivant.

Proposition 5.5. *Soient $f\colon I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle ouvert, $a \in I$ et supposons que f est dérivable en a. Alors f est continue en a.*

Démonstration. Écrivons

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a).$$

Par les règles de calcul des limites, la limite de $f(x)$ lorsque $x \to a$ est

$$\lim_{x \to a} f(a) + \left(\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)\left(\lim_{x \to a}(x - a)\right) = f(a) + f'(a) \cdot 0 = f(a).$$

On en déduit que f est continue en a. □

Nous avons déjà vu une fonction qui est continue mais pas différentiable ($x \mapsto |x|$). Alors être continue en a est une condition nécessaire mais *pas suffisante* pour la dérivabilité de f en a.

Comme la dérivée s'obtient en calculant une limite, on a des règles pour le calcul des dérivées.

Théorème 5.6. *Soient $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle ouvert et $a \in I$. Supposons que f et g sont dérivables en a avec dérivées $f'(a)$ et $g'(a)$ respectivement. Alors,*

1. *La somme $f + g$ définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ est dérivable en a avec dérivée*
$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$
2. *Le produit fg définie par $(fg)(x) = f(x)g(x)$ est dérivable en a avec dérivée*
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$
3. *A condition que $g(a)$ ne soit pas nul, le quotient f/g définie par $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ est dérivable en a avec dérivée*
$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Démonstration. Nous laissons la première règle comme exercice.

Pour démontrer la deuxième règle, nous écrivons, pour $x \neq a$,

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}, \\ &= \frac{f(x)g(x)-f(x)g(a)+f(x)g(a)-f(a)g(a)}{x-a}, \\ &= f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}+\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a).\end{aligned}$$

Puisque f et g sont dérivables en a, les deux quotients ici ont des limites lorsque $x \to a$. De plus, le fait que f est dérivable en a implique qu'elle est continue en a. Donc $f(x) \to f(a)$ lorsque $x \to a$. Finalement, nous pouvons prendre la limite du coté droit en utilisant les règles de calcul des limites. Ceci nous donne

$$\lim_{x\to a}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = f(a)g'(a)+f'(a)g(a).$$

Pour la dérivée du quotient, nous considérons d'abord le cas où $f(x) = 1$ pour tout x. Nous voulons démontrer que $h\colon x \mapsto 1/g(x)$ est dérivable en a avec dérivée $h'(a) = -g'(a)/g(a)^2$. Premièrement, nous constatons que h est bien définie sur un intervalle ouvert J qui contient a. Ceci découle du fait que g est continue en a (puisque elle est dérivable en ce point) et que $g(a) \neq 0$. Maintenant, nous écrivons pour $x \in J$, $x \neq a$,

$$\frac{h(x)-h(a)}{x-a} = \frac{1/g(x)-1/g(a)}{x-a} = -\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\frac{1}{g(x)g(a)}.$$

Puisque g est dérivable en a, la limite lorsque $x \to a$ du premier quotient dans le membre de droite existe et vaut $g'(a)$. En plus, g est dérivable et donc nécessairement continue en a, c'est à dire que $g(x) \to g(a)$ lorsque $x \to a$. Nous pouvons donc calculer la limite dans le membre de droite à l'aide des règles de calcul, ce qui nous donne

$$\lim_{x\to a}\frac{1/g(x)-1/g(a)}{x-a} = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$$

Finalement nous traitons le cas d'un quotient f/g pour f quelconque. En écrivant $f/g = f \cdot \frac{1}{g}$, nous voyons que le résultat découle de la règle pour un produit et de la règle pour un quotient de la forme $1/g$. □

Exemple 5.7. La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x$ est dérivable en tout point avec $f'(x) = 1$. (Démonstration à partir de la définition ?)

La fonction constante $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = k$ pour tout x est aussi dérivable en tout point avec $g'(x) = 0$. (Démonstration ?)

Il s'ensuit que tout polynôme $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ est dérivable en tout point avec dérivée

$$p'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 x + a_1.$$

5.2 Règles de la chaîne et de la réciproque

Nous passons maintenant à la dérivation des fonctions composées.

Théorème 5.8 (La règle de dérivation des fonctions composées)**.** *Soit f dérivable en a et g dérivable en $f(a)$. Alors la composition $g \circ f$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Démonstration. Soit

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } x \neq a, \\ \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases}$$

Alors F est continue en a et pour *tout* x,

$$f(x) = f(a) + (x - a)F(x).$$

De même, écrivons $b = f(a)$ et soit

$$G(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(b)}{y - b} & \text{si } y \neq b, \\ \\ g'(b) & \text{si } y = b \end{cases}$$

Alors G est continue en b et pour *tout* y,

$$g(y) = g(b) + (y - b)G(y).$$

Or, avec ces définitions en main, nous écrivons $y = f(x)$ et

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)), \\ &= g(y), \\ &= g(b) + (y - b)G(y), \\ &= g(f(a)) + (f(x) - f(a))\, G(f(x)), \\ &= g(f(a)) + (x - a)F(x)G(f(x)). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = F(x)G(f(x)).$$

Puisque f est dérivable en a, elle est continue en a. Dès lors, la fonction $x \mapsto G(f(x))$ est aussi continue en a et donc $G(f(x)) \to G(f(a))$ lorsque $x \to a$. Maintenant, par les règles de calcul des limites, nous obtenons que

$$\lim_{x \to a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = F(a)G(f(a)) = f'(a)g'(f(a))$$

comme annoncé. $\square$

Remarquons que cette formule est plus facile à mémoriser dans la notation de Leibniz. Si nous écrivons $y = f(x)$ et $u = g(y)$ alors, $f'(a) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ et $g'(b) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$. La règle de dérivation des fonctions composées dit que

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Il est crucial par contre, d'insister sur le fait que **l'on ne peut pas démontrer la règle de dérivation des fonctions composées en simplifiant les termes $\mathrm{d}y$ dans cette equation comme s'il s'agissait de fractions !** Les numérateurs et dénominateurs n'ont pas de sens seuls et donc il n'est pas permis de les manipuler comme des nombres réels.

Un deuxième mot d'avertissement : dans cette équation, pour trouver $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ en a, il faut évaluer $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en a et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$ en $f(a)$.

La règle de dérivation des fonctions composées permet d'obtenir une formule pour la dérivée de la réciproque d'une fonction dérivable.

Théorème 5.9 (La règle de la réciproque)**.** *Soit $f\colon I \to J$ une bijection continue entre deux intervalles ouverts $I, J \subset \mathbb{R}$. Supposons que f est dérivable en $a \in I$ et que $f'(a) \neq 0$. Alors la réciproque f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration. Comme bijection continue, f est strictement monotone. (La démonstration se base sur le théorème de la valeur intermédiaire. A vous de le faire !) Le théorème 4.47 dans notre discussion de la continuité nous apprend que la réciproque $f^{-1}\colon J \to I$ est aussi continue. Écrivons $g = f^{-1}$.

Soit $k \neq 0$ un nombre quelconque tel que $b + k \in J$. Nous définissons un nombre h par $h = g(b+k) - g(b)$. Alors $k = f(a+h) - f(a)$. Vu que g est une bijection, $h \neq 0$. De plus,

$$\frac{g(b+k) - g(b)}{k} = \frac{h}{f(a+h) - f(a)}.$$

Nous voulons prendre la limite de cette quantité lorsque $k \to 0$. Nous nous rappelons que $h = h(k)$ dépend de k par l'équation $h(k) = g(b+k) - g(b)$. Mais g est continue en b, donc h est continue en 0 et de plus, $h(0) = 0$. Donc $h(k) \to 0$ lorsque $k \to 0$.

D'ici il découle que

$$\lim_{k\to 0} \frac{g(b+k) - g(b)}{k} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{f(a+h) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

Ce résultat est aussi plus facile à mémoriser dans la notation de Leibniz. Si nous écrivons $y = f(x)$, alors $g(y) = x$, $f'(a) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ et $g'(b) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$. Alors, la règle de la réciproque dit que

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}x}$$

De nouveau, nous insistons sur le fait que **cette équation n'est pas une démonstration de la règle de la réciproque.** Elle est plutôt une *conséquence* de la règle.

Nous terminons cette discussion de la dérivabilité de la réciproque par une interpretation géométrique de la formule $(f^{-1})' = 1/f'$. Cette formule peut s'interpréter sur la figure ci-dessus. Remarquons que les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la diagonale principale. Il doit dès lors en être de même des tangentes en des points homologues (symétriques par rapport à la diagonale principale). Si $P = (a, b) = (a, f(a))$, son point homologue est $Q = (b, a) = (b, f^{-1}(b))$. L'équation de la tangente au graphe de f au point $P = (a, b)$ s'écrit $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. De même, l'équation de la tangente au graphe de f^{-1} au point $Q = (b, a)$ s'écrit $y = f^{-1}(b) + (f^{-1})'(b)(x - b)$. Ces deux droites seront symétriques par rapport à la diagonale principale si leurs coefficients angulaires sont inverses l'un de l'autre. C'est le résultat énoncé dans la proposition.

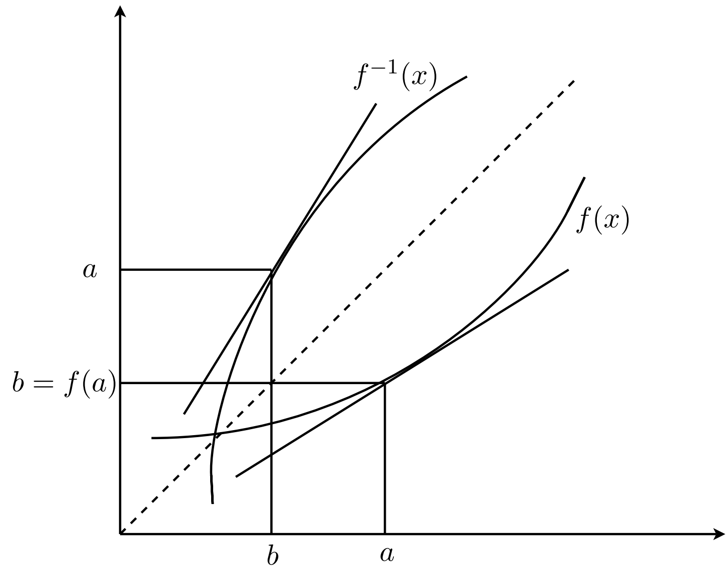


FIGURE 13 – Symétrie des tangentes aux graphes de f et f^{-1}.

Exemple 5.10.

1. La fonction $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ donnée par $f(x) = x^2$ est une bijection dérivable. Sa dérivée $f'(a) = 2a$ n'est jamais nulle pour $a > 0$, donc sa réciproque $f^{-1}\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ est aussi dérivable, avec $(f^{-1})'(b) = (2a)^{-1}$ où $b = a^2$. En d'autres mots, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable avec dérivée
$$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
2. Soit $m > 0$ un entier. La fonction $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ donnée par $f(x) = x^m$ est une bijection dérivable avec dérivée qui n'est jamais nulle. Juste comme dans le cas $m = 2$ ci-dessus, nous voyons que sa réciproque f^{-1} est aussi dérivable, avec $(f^{-1})'(b) = (ma^{m-1})^{-1}$ où $b = a^m$. En d'autres mots, la fonction $h\colon x \mapsto x^{1/m}$ est dérivable avec dérivée
$$h'(x) = \frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}.$$
Soient n un autre entier et $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ la fonction $g(x) = x^n$. La composition $F = g \circ h\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ est la fonction $F(x) = x^{n/m}$. Par la règle de la chaîne,
$$F'(x) = g'(h(x))h'(x) = \left(nx^{\frac{n-1}{m}}\right)\left(\frac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}\right) = \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}.$$
3. La fonction $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $\exp(x) = e^x$ est dérivable, avec $(\exp)' = \exp$. Elle est aussi strictement monotone, avec image $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. (Nous verrons plus tard des justifications rigoureuses de ces faits, pour lesquelles il nous faudra une définition rigoureuse de e^x.)

   Étant donné tout ça, il s'ensuit que sa réciproque $\log\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est aussi dérivable. Sa dérivée est donné par la règle de la réciproque :
$$(\log)'(b) = \frac{1}{(\exp)'(a)} = \frac{1}{\exp(a)}$$
   où $\exp(a) = b$. Donc,
$$(\log)'(x) = \frac{1}{x}.$$
4. Les fonctions cos et sin sont dérivables avec dérivées $(\sin)' = \cos$ et $(\cos)' = -\sin$. Nous verrons des démonstrations plus tard, après que nous aurons donné des définitions rigoureuses de cos et sin.

   Étant donné ces faits, nous pouvons trouver les dérivées des fonctions réciproques arcsin et arccos de sin et cos. (Attention : quels sont les domaines de définition des réciproques ?)

   La règle ci-dessus nous donne que arcsin est dérivable à condition que nous considérons une région où cos n'est pas nul. De plus,
$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\cos(y)}$$

où $\sin(y) = x$. Or, puisque $\cos^(y)+\sin^2(y) = 1$, nous voyons que $\cos^2(y) = 1-x^2$, et donc $\cos(y) = \sqrt{1-x^2}$ à condition que nous considérions une région où $\cos(y) > 0$ (sinon nous prendrions la racine négative). Donc,

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De même,

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

5.3 Condition nécessaire pour un extremum local

Un des intérêts importants de la notion de dérivée est qu'elle intervient pour trouver les points où une fonction atteint ses maximum et minimum. Étant un objet tout à fait local, la dérivée $f'(a)$ ne peut que percevoir le comportement local de f près de a. Nous commençons donc avec les définitions de maximum et minimum *locaux*.

Définition 5.11. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$.

Le point $a \in E$ est dit un *maximum local* de f s'il existe $\epsilon > 0$ tel que si $x \in E$ avec $|x-a| < \epsilon$, alors $f(a) \geq f(x)$.

Le point $a \in E$ et dit un *minimum local* de f s'il existe $\epsilon > 0$ tel que si $x \in E$ avec $|x-a| < \epsilon$, alors $f(a) \leq f(x)$.

Si a est un maximum local ou un minimum local alors a et appelé un *extremum local*.

Proposition 5.12. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert qui contient a. Supposons que f est dérivable en a et que a est un extremum local de f. Alors $f'(a) = 0$.*

Démonstration. Nous traitons le cas d'un maximum local, le cas d'un minimum se démontre de façon identique.

Par la définition d'un maximum local, il existe un intervalle ouvert I qui contient a et tel que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$. Donc, si $x \in I$ et $x > a$,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0,$$

alors que si $x \in I$ et $x < a$,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0.$$

Vu que f est dérivable en a, nous pouvons prendre la limite de ce quotient lorsque $x \to a$. Il s'ensuit que si nous prenons la limite dans le membre de droite lorsque $x \to a$, nous obtenons

$$f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0.$$

Par contre, la limite dans le membre de gauche satisfait

$$f'(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

Donc on peut conclure que $f'(a) = 0$. □

> **Définition 5.13.** Soit f une fonction dérivable. Un point a où $f'(a) = 0$ est appelé *un point critique de f*.

Nous avons vu que tout extremum local est un point critique. La réciproque par contre est fausse. Par exemple, la fonction $f(x) = x^3$ a un point critique en 0, mais ce n'est pas un extremum local.

Exemple 5.14. Le fait que tout extremum local est un point critique est parfois utile même si on veux trouver les extrema *globaux* d'une fonction.

Soit $f\colon [0, 3] \to \mathbb{R}$, la fonction définie par

$$f(x) = x(x - 1)(x - 2).$$

Comme fonction continue sur un intervalle fermé, f atteint ses bornes. Nous voulons trouver les valeurs du minimum et du maximum de f et où exactement elles sont atteintes.

Puisque f est un polynôme, f est dérivable en tout point. De plus,

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

Donc $f'(x) = 0$ pour $x = 1 \pm 1/\sqrt{3}$. Alors les seules possibilités pour les valeurs maximale et minimale sont

$$f(0), f(1 - 1/\sqrt{3}), f(1 + 1/\sqrt{3}), f(3)$$

(Constatons qu'il faut considérer aussi les valeurs de f aux extrémités de l'intervalle, puisque la condition nécessaire pour un extremum local ne marche que pour les points « intérieur »—le résultat parle d'un intervalle ouvert.)

En calculant, nous obtenons

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ f(1 - 1/\sqrt{3}) &= \frac{2}{3\sqrt{3}}, \\ f(1 + 1/\sqrt{3}) &= -\frac{2}{3\sqrt{3}}, \\ f(3) &= 6. \end{aligned}$$

Alors le minimum de f sur $[0, 3]$ est $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ qui est atteint en $x = 1+1/\sqrt{3}$ et le maximum est 6 qui est atteint en $x = 3$.

5.4 Théorème de la moyenne

Dans cette section nous expliquons un résultat élémentaire mais très important concernant les fonction dérivables.

Théorème 5.15 (Théorème de la moyenne)**.** *Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b). Alors il existe $c \in (a, b)$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Avant de donner la démonstration, nous interprétons le résultat sur base d'un dessin.

Dessin.

Démonstration. Supposons d'abord que $f(a) = f(b)$. Nous voulons trouver un point $c \in (a, b)$ tel que $f'(c) = 0$. Ce cas particulier du résultat porte souvent le nom de *théorème de Rolle.*

Puisque f est continue sur $[a, b]$, elle atteint un maximum $f(c_1)$ et un minimum $f(c_2)$ sur $[a, b]$ par le théorème des bornes atteintes.

Si $f(c_1) = f(c_2)$ alors f est constante sur $[a, b]$ et donc $f'(c) = 0$ pour tout $c \in (a, b)$.

Si $f(c_1) \neq f(c_2)$ alors au moins un des points a ou b n'est pas c_1 ou c_2. Autrement dit au moins un des points c_1, c_2 se trouve dans (a, b) ; nous notons cet extremum global $c \in (a, b)$. Un extremum global et forcement un extremum local et donc $f'(c) = 0$.

Pour le cas général, quand $f(a) \neq f(b)$, nous considérons la fonction

$$g(x) = f(x) - \lambda x$$

où

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Puisque f est continue sur $[a, b]$, il s'ensuit que g est continue sur $[a, b]$. Vu que f est dérivable sur (a, b), la même chose est vraie pour g. De plus, le choix de λ garanti que $g(a) = g(b)$. Donc, par le cas particulier du résultat démontré ci-dessus (théorème de Rolle), il existe $c \in (a, b)$ tel que $g'(c) = 0$. Mais

$$g'(x) = f'(x) - \lambda$$

et donc $f'(c) = \lambda$, ce qui termine la démonstration. □

Soit f dérivable en a. Intuitivement, si $f'(a) > 0$ alors f est croissante autour de a. De même si $f'(a) < 0$ alors f est décroissante autour de a. Le théorème de la valeur intermédiaire nous permet de justifier cette intuition.

Proposition 5.16 (Condition suffisante pour la monotonie)**.** *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur (a,b).*

1. *Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in (a,b)$ alors f est strictement croissante sur $[a,b]$.*
2. *Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in (a,b)$ alors f est strictement décroissante sur $[a,b]$.*
3. *Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in (a,b)$ alors f est constante sur $[a,b]$.*

Démonstration. Nous donnons la démonstration de la première assertion, les autres se démontrent de façon analogue.

Soit $x_1, x_2 \in [a,b]$ avec $x_1 < x_2$. Vu que f satisfait les hypothèses du théorème de la valeur intermédiaire, il existe $c \in (a,b)$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Puisque $f'(c) > 0$, il s'ensuit que $f(x_2) > f(x_1)$ et donc f est strictement croissante sur $[a,b]$. □

Remarquons qu'il y a aussi une version de ce résultat qui dit que si $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante, et également que si $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante. A vous de donner les détails.

Exemple 5.17. Considérons la fonction e^x, qui a les propriétés suivantes : elle est strictement positive, $e^{-x} = 1/e^x$, si $x \geq 0$ alors $e^x \geq 1$, elle est dérviable en tout point et sa dérivée est encore e^x. Étant donné ces faits (dont nous verrons des démonstrations rigoureuses plus tard), nous démontrerons que pour tout x,

$$e^x \geq 1 + x.$$

Pour le voir, soit $f(x) = e^x - 1 - x$. Or f est dérivable et

$$f'(x) = e^x - 1$$

Il s'ensuit du fait que $e^x \geq 0$ quand $x \geq 0$ que pour tel x, $f'(x) \geq 0$ et alors f est croissante sur $[0, \infty)$. Donc pour $x \geq 0$, $f(x) \geq f(0) = 0$. Autrement dit, pour $x \geq 0$, $e^x \geq 1 + x$.

Pour $x \leq 0$, $-x \geq 0$ et donc $e^x = 1/e^{-x} \leq 1$. Alors pour tout $x \leq 0$, $f'(x) \leq 0$. Donc f est décroissante sur $(-\infty, 0]$. Alors pour tout $x \leq 0$, $f(x) \geq f(0) = 0$. Autrement dit, pour $x \leq 0$, $e^x \geq 1 + x$.

Il y a aussi une version comparative du théorème de la valeur moyenne qui s'applique à deux fonctions simultanément (appelé par fois le théorème de la valeur moyenne de Cauchy). La démonstration, qui est une application du théorème de la valeur moyenne pour une seule fonction, est laissée comme exercice.

Théorème 5.18 (Théorème de la valeur moyenne comparatif)**.** *Soit $f, g\colon [a, b]$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur (a, b). Alors il existe $c \in (a, b)$ tel que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

à condition que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in (a, b)$.

5.5 Règle de l'Hospital

Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et supposons que nous voulons trouver la limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Les règles de calcul des limites sont utiles pour cette question à condition que $g(a) \neq 0$. Mais quelle est la bonne réponse quand $g(a) = 0$?

Quand $g(a) = 0$ et $f(a) \neq 0$, la limite est $\pm\infty$ (selon le signe de $f(a)$). Mais quand $f(a) = 0 = g(a)$, la question est plus subtile. Il faut comparer les vitesses avec lesquelles $f(x)$ et $g(x)$ tendent vers zéro lorsque x tends vers a.

Ayant vu le mot « vitesse » il est logique que les dérivées de f et g peuvent nous aider ici. Ceci est expliqué par la règle de l'Hospital.

Théorème 5.19 (Règle de l'Hospital)**.** *Soient $f, g\colon [c, d] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[c, d]$ et dérivable sur (c, d). Soit $a \in (c, d)$ et supposons que $f(a) = 0 = g(a)$. Alors*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

à condition que cette deuxième limite existe.

Démonstration. Nous calculons d'abord la limite à droite. Soit $x \in (a, d]$. Nous appliquons le théorème de la valeur moyenne comparatif aux fonctions f, g sur l'intervalle $[a, x]$. Il existe $\xi \in (a, x)$ tel que

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Bien sur, ξ dépend de x, donc nous l'écrivons $\xi(x)$. Puisque $\xi(x) \in (a, x)$, $\xi(x) \to a^+$ lorsque $x \to a^+$. Donc,

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to a^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

à condition que cette deuxième limite existe.

De même, nous pouvons prendre la limite à gauche, en considérant les intervalles $[x, a]$ pour $x \in [c, a)$. Le même argument nous donne que

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to a^-} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

encore une fois à condition que cette deuxième limite existe. La règle de l'Hospital en découle. $\square$

Remarquons *qu'il faut absolument que $f(a) = 0 = g(a)$ pour que la règle de l'Hospital s'applique !*

Exemple 5.20.

1. Soit $\sin, \cos \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les fonctions bien connues de la trigonométrie. Nous démontrerons rigoureusement plus tard qu'elles sont dérivables en tout point avec dérivées $(\sin)' = \cos$ et $(\cos)' = -\sin$. En supposant ces faits, nous calculons maintenant

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

   Pour le voir il suffit d'appliquer la règle de l'Hospital avec $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$. Pusique $f(0) = 0 = g(0)$, les hypothèses sont satisfaites. Donc la limite cherchée est

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

   (puisque $\cos(x)$ est continue donc $\lim_{x \to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$.)

2. Rappelez-vous que la fonction $\exp \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\exp(x) = e^x$ a toutes les propriétés attendues de l'école : elle est dérivable avec $(\exp)' = \exp$ et sa réciproque $\log \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est aussi dérivable avec $(\log)'(x) = 1/x$. Nous allons utiliser ces propriétés et la règle de l'Hospital pour calculer la limite

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}.$$

   Puisque log est continue (même dérivable), il découle que

$$\log\left(\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\log (1 + x)^{1/x}\right).$$

Maintenant, nous utilisons le fait que pour tout $a > 0$ et tout b, $\log(a^b) = b\log(a)$. (Pour le voir, écrivez $a = \exp(c)$ pour $c \in \mathbb{R}$ et prenez le logarithme de $\exp(cb) = \exp(c)^b$.) Ceci nous donne que

$$\lim_{x\to 0}\left(\log\left(1+x\right)^{1/x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}.$$

Enfin nous pouvons appliquer la règle de l'Hospital. Prenons $f(x) = \log(1+x)$ et $g(x) = x$. Les hypothèses sont satisfaites puisque $f(0) = 0 = g(0)$. Donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1/(1+x)}{1} = 1.$$

Nous avons calculé le logarithme de la limite. Donc en prenant l'exponentielle, nous voyons que

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \exp\left(\lim_{x\to 0}\left(\log(1+x)^{1/x}\right)\right) = \exp(1) = e.$$

(La première égalité ici est justifié par le fait que exp est continue.)

Parfois on trouve que la limite de $f'(x)/g'(x)$ souffre du même problème que celle de $f(x)/g(x)$, c'est à dire que $f'(a) = 0 = g'(a)$. Dans cette situation, et supposant que toute hypothèse nécessaire est satisfaite, on peux appliquer la règle de l'Hospital encore une fois pour écrire la limite en utilisant les dérivées de deuxième ordre. Plus précisément . . .

Théorème 5.21 (Règle de l'Hospital, deuxième version)**.** *Soit $f, g\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continue sur $[c,d]$ et n-fois dérivable sur (c,d). Soit $a \in (c,d)$ et supposons que pour tout $k = 0, 1, \ldots, n-1$,*

$$f^{(k)}(a) = 0 = g^{(k)}(a).$$

Alors

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

à condition que cette limite des n^e dérivées existe.

La preuve se fait par récurrence basée sur la version précédente de la règle de l'Hopital.

Il y a des exemples où il faut cette deuxième version de la règle dans les exercices.

5.6 Dérivée des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Pour trouver sa dérivée, nous étudions exactement la même limite que pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$:

Définition 5.22. Soit $f: I \to \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur un intervalle ouvert qui contient le point $a \in I$. Nous disons que f est dérivable en a si la limite suivante existe :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Dans ce cas la limite se note $f'(a)$ et elle est dite la dérivée de f en a.

Constatons que cette définition est *identique* à celle donnée pour les fonctions à valeurs réelles, le seul changement étant que dans le numérateur $f(a+h) - f(a)$, la soustraction est celle de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. La dérivée $f'(a)$ est alors un élément de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire un vecteur et pas juste un nombre.

Géométriquement, on peut penser à f comme la description d'une courbe dans $\mathbb{R}^n$, peut-être la trajectoire d'un mobile. La dérivée $f'(a)$ indique la direction de la tangente à la courbe, ou bien le vecteur vitesse du mobile.

Juste comme pour la continuité d'une fonction, on peut analyser la dérivabilité d'une fonction composante par composante.

Lemme 5.23. *Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction dont les composantes sont $f_1, \ldots, f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Cette fonction est dérivable en a si et seulement si ses composants sont toutes dérivables en a. Dans ce cas,*

$$f'(a) = (f_1'(a), \ldots, f_n'(a)).$$

Démonstration. La j^{e} composante de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ n'est rien d'autre que $\frac{f_j(a+h)-f_j(a)}{h}$. Donc le résultat découle du lemme 4.62. $\square$

Nous avons aussi une règle de dérivation des fonctions composées dans ce contexte.

Théorème 5.24 (Règle de dérivation des fonctions composées)**.** *Soient $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en a et $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dérivable en $f(a)$. Alors la composition $g \circ f$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) g'(f(a)).$$

Démonstration. Les composantes de $g \circ f$ sont simplement les compositions des composantes de g avec la fonction f. D'ici le résultat découle de la règle de dérivation des fonctions composées pour les fonctions d'une seule variable et le lemme 5.23. $\square$

5.7 Dérivées directionnelles, dérivées partielles et le gradient

Dans cette section, nous étudions le sens de la « variation instantanée » d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, qui dépend de *plusieurs* variables. Le graphe d'une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ représente une courbe dans le plan ; le graphe Γ d'une fonction $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une « surface de dimension n dans l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$. »

$$\Gamma = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n\}$$

Cette manière de percevoir une fonction de plusieurs variables marche particulièrement bien pour les fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ parce que là nous parlons bien d'une vraie surface dans l'espace de dimension 3 et donc on peut le visualiser plus facilement que pour les dimensions supérieurs.

La dérivée d'une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donne la pente de la tangente à son graphe. On peut essayer de faire quelque chose de semblable pour une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, en considérant le « plan tangent » au graphe de f. Ceci pose la question : comment décrire la pente d'un plan ? Nous allons aborder ce problème étape par étape.

Définition 5.25. Soient $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \mathbb{R}^n$ et $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On dit que f est dérivable en a dans la direction v si la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h}$$

existe. Dans ce cas, la limite est la dérivée directionnelle de f en a dans la direction v et elle se note $\partial_v f(a)$.

Pour calculer la dérivée directionnelle, nous définissons une nouvelle fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = g(a + tv)$ et nous considérons la dérivée de g en 0. Quand cette limite existe, il s'agit de la dérivée directionnelle de f en a dans la direction v et elle se note $\partial_v f(a)$.

Constatons que malgré son nom, la dérivée directionnelle $\partial_v f$ ne dépend pas que de la direction de v, elle dépend aussi de sa longueur. Par exemple $\partial_{2v} f = 2\partial_v f$.

En calculant la dérivée $\partial_v f$, nous nous concentrons sur le comportement de f le long de la droite L qui passe par a dans la direction v. En terme du graphe de f, il y a un plan de dimension 2 dans $\mathbb{R}^{n+1}$ qui coupe $\mathbb{R}^n$ perpendiculairement dans la droite L. Le graphe de f coupe ce plan en une courbe et, au moins quand $|v| = 1$, la dérivée directionnelle $\partial_v f(a)$ est la pente de la tangente à cette courbe au dessus de $a \in L$.

Définition 5.26. Soient $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}^n$. Nous disons que la j^{e} dérivée partielle de f en a existe quand la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \ldots a_n) - f(a)}{h}$$

existe. Dans ce cas, la limite est appelée la j^{e} dérivée partielle de f en a et elle se note

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Cette définition est en réalité un cas particulier de celle de la dérivée directionnelle. En mettant $v = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ avec le 1 en j^{e} place, nous voyons que

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \partial_v f(a).$$

Effectivement, pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ nous avons fixé toutes les variables $x_1, \ldots, x_n$, *sauf* x_j pour arriver à une fonction d'une seule variable dont nous avons pris la dérivée.

Nous allons rassembler toutes les dérivées directionnelles en un seul objet, qui s'appelle le gradient de f.

Définition 5.27. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Nous disons que f est *différentiable* en a s'il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \langle u, x - a \rangle}{\|x - a\|} = 0$$

où $\langle u, v \rangle$ est le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$:

$$\langle (u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n) \rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j.$$

Quand il existe, le vecteur u s'appelle *le gradient* ou *la differentielle* de f en a et il se note $\nabla f(a)$.

(Nous rappelons que dans cette définition, nous prenons la limite pointée de la fonction $D\colon \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$D(x) = \frac{f(x) - f(a) - \langle u, x - a \rangle}{\|x - a\|}$$

La limite pointée pour une fonction de plusieurs variables est décrite dans la définition 4.61.)

Exemple 5.28. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction $f(x, y) = xy$. Nous démontrerons directement de la définition que f est dérivable en (a, b) avec différentielle (b, a). Pour le faire, il faut démontrer que

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} \frac{xy - ab - \langle (x - a, y - b), (b, a) \rangle}{\|(x - a, y - b)\|} = 0$$

En développant le produit scalaire, cette limite devient

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{(x-a)(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$$

Maintenant nous appliquons l'inégalité $A^2 + B^2 \geq 2AB$ qui dit que

$$\frac{AB}{\sqrt{A^2+B^2}} \leq \frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2}$$

En mettant $A = |x-a|$ et $B = |y-b|$, nous obtenons

$$\frac{|x-a||y-b|}{\sqrt{|x-a|^2+|y-b|^2}} \leq \frac{1}{2}\sqrt{|x-a|^2+|y-b|^2}$$

Vu que le coté droit tend vers zéro lorsque $(x, y) \to (a, b)$, il s'ensuit que le coté gauche tend vers zéro aussi et donc que f est dérivable en (a, b) avec gradient (b, a).

Nous expliquons maintenant le lien entre le gradient et les dérivées directionnelles et partielles de f.

Lemme 5.29. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en a. Alors f est dérivable dans toute direction en a et*

$$\partial_v f(a) = \langle \nabla f(a), v\rangle.$$

Il s'ensuit que les composantes de ∇f sont précisément ses dérivées partielles

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Démonstration. Étant donné $v \in \mathbb{R}^n$, il faut démontrer que

$$\frac{f(a+hv)-f(a)}{h} \to \langle \nabla f(a), v\rangle$$

ou autrement dit que

$$\frac{f(a+hv)-f(a)-\langle \nabla f(a), hv\rangle}{h} \to 0.$$

Mais cette deuxième quantité est simplement $|v|$ fois la quantité qui apparait dans la définition de la différentiabilité de f (avec x remplacé par $a + hv$). □

Avertissement : pour que f soit différentiable, *il est nécessaire mais pas suffisant que les dérivées partielles de f existent.* Même si l'existence des dérivées partielles nous permet d'écrire la formule ci-dessus pour ∇f, il n'implique pas que $\partial_v f$ est donnée par le produit scalaire de v avec un vecteur fixe. Il y a un exemple de ce comportement dans la feuille d'exercices.

En revanche, avec une hypothèse additionnelle sur les dérivées partielles, la différentiabilité de f est garantie. Nous ne donnons pas de démonstration du résultat suivant qui est un peu technique.

> **Proposition 5.30.** *Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction dont toute dérivée partielle existe. Si les dérivées partielles sont toutes des fonctions continues*
>
> $$\frac{\partial f}{\partial x_j}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$
>
> *alors f est dérivable en tout point.*

Le lemme 5.29 ci-dessus dit que le gradient de f nous permet de calculer la variation de f le long de toute droite dans $\mathbb{R}^n$, mais en fait, on a plus d'information : *à partir du gradient, nous pouvons calculer la variation de f le long de toute courbe dérivable dans $\mathbb{R}^n$*. Ceci est le contenu de la version suivante de la règle de dérivation en chaîne. La démonstration de cette version est un peu plus technique que la version qui s'applique à deux fonctions d'une seule variable (théorème 5.8).

> **Proposition 5.31** (La règle de dérivation en chaîne)**.** *Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en $f(a)$. La composition $g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en a et*
>
> $$(g \circ f)'(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(a)) f_j'(a) = \left\langle \nabla g(f(a)), f'(a) \right\rangle .$$

Démonstration. Il faut démontrer que la quantité suivante tend vers zéro lorsque $h \to 0$:

$$R(h) = \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} - \left\langle \nabla g(f(a)), f'(a) \right\rangle .$$

On peut écrire $R(h) = P(h) + Q(h)$ où

$$P(h) = \frac{g(f(a+h)) - g(f(a)) - \langle \nabla g(f(a)), f(a+h) - f(a) \rangle}{h}$$
$$Q(h) = \left\langle \nabla g(f(a)), f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right\rangle .$$

Effectivement, pour arriver à P, nous avons remplacé le terme $f'(a)$ dans le produit scalaire dans R par $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, en nous rappelant que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est plus où moins égale à $f'(a)$. Maintenant Q est simplement donné par $Q = R - P$, et donc c'est l'erreur commise en faisant cette approximation.

Nous allons démontrer que $P(h) \to 0$ et $Q(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$. Pour $Q(h)$, constatons que par l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$|Q(h)| \leq \|\nabla g(f(a))\| \left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| .$$

Le premier terme du coté droit ne dépend pas de h alors que le deuxième tend vers zéro parce que $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \to f'(a)$. Il s'ensuit que le membre de droite tend vers zéro et donc que $Q(h)$ tend vers zéro aussi.

Pour $P(h)$, nous considérons d'abord les valeurs de h où $f(a+h) = f(a)$. Pour un tel h, la numérateur de $P(h)$ s'annule et donc $P(h) = 0$. Il suffit alors de traiter h pour lequel $f(a+h) \neq f(a)$. Dans ce cas nous pouvons écrire $P(h) = A(h)B(h)$ où

$$\begin{aligned} A(h) &= \frac{g(f(a+h)) - g(f(a)) - \langle \nabla g(f(a)), f(a+h) - f(a) \rangle}{\|f(a+h) - f(a)\|}, \\ B(h) &= \frac{\|f(a+h) - f(a)\|}{h}. \end{aligned}$$

Or, $|B(h)| \to |f'(a)|$ lorsque $h \to 0$. Il suffit alors de démontrer que $A(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$.

Pour le voir, constatons que la différentiabilité de g en $f(a)$ entraîne que

$$\lim_{y \to f(a)} \frac{g(y) - g(f(a)) - \langle \nabla g(f(a)), y - f(a) \rangle}{\|y - f(a)\|} = 0.$$

Si on prend $y = f(a+h)$, la quantité dont on prend la limite est simplement $A(h)$. La limite dans la définition de la différentiabilité de g est prise lorsque $y \to f(a)$ alors que nous voulons traiter la limite de $A(h)$ lorsque $h \to 0$. Mais vu que f est dérivable en a, elle y est continue aussi. Donc $f(a+h) \to f(a)$ lorsque $h \to 0$. Il en découle que $A(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$. □

Ce résultat nous permet de mieux visualiser le gradient de g (au moins quand $\nabla g \neq 0$). Si $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est une courbe dérivable sur laquelle g est constante alors $\nabla g(a)$ est orthogonal à $f'(a)$. Considérons l'ensemble $X_c = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = c\}$ où g prend la valeur c. Toute courbe dérivable qui se trouve entièrement dans X_c est orthogonale en tout point au gradient de g. Nous voyons alors que ∇g est toujours orthogonal aux hypersurfaces X_c.

On peut réinterpréter cette observation en termes du graphe $\{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n\}$ de g. Elle dit effectivement que le plan tangent au graphe de f en a contient précisément tous les vecteurs qui sont orthogonaux au vecteur

$$n = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}, 1 \right).$$

Nous terminons pour l'instant notre discussion du gradient avec une dernière interprétation. Le lemme suivant dit que ∇f indique la direction dans laquelle f grandit le plus rapidement.

Lemme 5.32. *Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dérivable en a. Alors pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$,*

$$|\partial_v f(a)| \leq \|v\| \|\nabla f(a)\|$$

avec égalité si et seulement si $\nabla f(a)$ et v sont proportionnels.

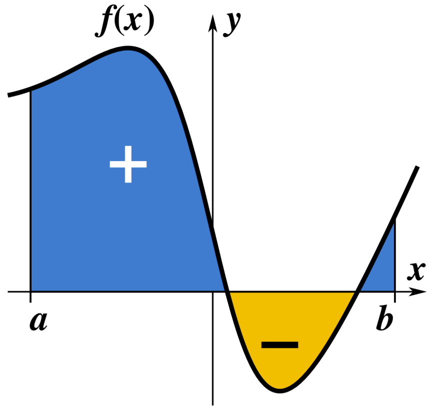
Démonstration. Ceci est effectivement l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$|\partial_v f(a)| = |\langle v, \nabla f(a)\rangle| \leq \|v\| \|\nabla f(a)\|$$

avec égalité si et seulement si v et $\nabla f(a)$ sont proportionnels. □

6 Intégrale de Riemann

Nous passons maintenant à l'autre outil principal de l'analyse : l'intégrale. La motivation initiale de la notion d'intégrale est le calcul de l'aire sous le graphe d'une fonction.



s

Figure 14 – L'aire (signée) sous un graphe

Les origines de la procédure que nous présenterons se trouvent dans les calculs d'Archimède. Il calcula l'aire entre une parabole et une droite en coupant la région en des morceaux triangulaires de plus en plus petits. En laissant la taille des triangles tendre vers zéro, il a obtenu l'aire par passage à la limite.

Presque deux milles ans plus tard, c'est cette approche que Riemann a appliqué pour calculer l'aire sous le graphe d'une fonction. C'est l'approche de l'intégrale par Riemann que nous expliquons dans ce cours. Observons cependant que la définition de l'intégrale due à Riemann n'est pas la plus générale. Il existe d'autres définitions de l'intégrale qui généralisent l'approche de Riemann en ce sens qu'elles permettent d'intégrer des fonctions plus générales que dans la théorie de Riemann (et qu'elles donnent la même valeur dans le cas des fonctions « intégrables » au sens de Riemann). Mentionnons par exemple l'intégrale de Lebesgue qui est plus « puissante » que l'intégrale de Riemann. Vous aborderez la définition de l'intégrale de Lebesgue dans les cours d'analyse plus avancés.

6.1 Définition

L'intégrale de Riemann concerne les fonctions bornées $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, définies sur une intervalle borné et fermé. Étant donné une telle fonction, nous essayons d'abord d'estimer l'aire en dessous de son graphe en coupant la région en morceaux rectangulaires. Nous commençons en précisant la phrase « couper l'intervalle en morceaux ».

Définition 6.1. Étant donné un intervalle borné et fermé $[a, b]$, une *partition* P de $[a, b]$ est une liste finie de points $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ qui satisfont

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Soient $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et P une partition de $[a, b]$. Puisque f est bornée sur $[a, b]$, elle est forcement bornée sur chaque sous-intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Écrivons

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \\ M_i &= \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}. \end{aligned}$$

Géométriquement, m_i est la hauteur du rectangle de base $[x_{i-1}, x_i]$ le plus haut que l'on peut placer en dessous du graphe de f. De même, M_i est la hauteur du rectangle de base $[x_{i-1}, x_i]$ le moins haut que l'on peut placer au dessus du graphe de f.

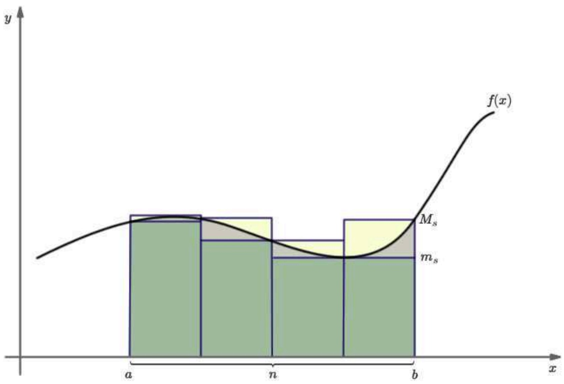


FIGURE 15 – Approximations par au-dessus et par en-dessous

Définition 6.2. Soit $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une partition de $[a, b]$. Étant donné une fonction bornée $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, *la somme supérieure de f par rapport à P* est

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}),$$

où $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. *La somme inférieure de f par rapport à P* est

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$

où $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$.

Géométriquement, $U(f, P)$ est la somme des aires des rectangles les moins hauts qui se trouvent au-dessus du graphe de f alors que $L(f, P)$ est la somme des aires des rectangles les plus hauts qui se trouvent en-dessous du graphe de f. Ce sont donc les meilleures approximations supérieures et inférieures de l'aire sous le graphe à l'aide d'un découpage rectangulaire dont les côtés sont donnés par la partition P.

Evidement, $L(f, P) \leq U(f, P)$ et l'aire de la région en-dessous du graphe est coincée entre ces deux nombres.

Étant donné une fonction bornée $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, écrivons $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ et $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$. Pour une partition quelconque $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$, $m_i \geq m$ et $M_i \leq M$. Donc,

$$m(b-a) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq M(b-a)$$

On en déduit que

$$\mathcal{L}(f) = \sup\{L(f, P) : P \text{ une partition de } [a, b]\}$$

est le supremum d'un ensemble majoré (par $M(b-a)$) et donc $\mathcal{L}(f)$ est fini.

De même,

$$\mathcal{U}(f) = \inf\{U(f, P) : P \text{ une partition de } [a, b]\}$$

est l'infimum d'un ensemble minoré (par $m(b-a)$) et donc $\mathcal{U}(f)$ est fini.

Définition 6.3. Étant donné une fonction bornée $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, la quantité

$$\mathcal{L}(f) = \sup\{L(f, P) : P \text{ une partition de } [a, b]\}$$

est appelée *l'intégrale inférieure de f*.

La quantité

$$\mathcal{U}(f) = \inf\{U(f, P) : P \text{ une partition de } [a, b]\}$$

est appelée *l'intégrale supérieur de f*

Définition 6.4. Une fonction bornée $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite *intégrable* si $\mathcal{L}(f) = \mathcal{U}(f)$. Dans ce cas, cette valeur commune se note

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Quand on veut mettre en valeur le fait que l'on utilise la théorie de Riemann, comme c'est le cas ici, on précise que la défition précédente défini les fonctions *intégrables au sens de Riemann.*

Nous verrons qu'il y a beaucoup de fonctions intégrables, toutes les fonctions continues par exemple. Par contre, il y a aussi beaucoup de fonctions qui ne sont pas intégrables. En voici un exemple.

Exemple 6.5. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Observons que f n'est pas intégrable. Pour le voir, soit $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ une partition quelconque de $[0,1]$.

Puisque tout intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ contient des nombres rationnels ainsi que des nombres irrationnels, nous avons que

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 0,$$

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} = 1.$$

Donc $L(f,P) = 0$ et $U(f,P) = 1$, *quelle que soit la partition.*

Il découle d'ici que $\mathcal{L}(f) = 0$ alors que $\mathcal{U}(f) = 1$.

La première étape dans la théorie est d'établir le fait que $\mathcal{L}(f) \leq \mathcal{U}(f)$. Afin de le faire, nous prenons des partition de plus en plus fines. Pour expliquer ce qui se passe quand on change P, il nous faut le lemme suivant.

Lemme 6.6. *Soient $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ une partition de $[a,b]$ et $y \in [a,b]$ avec $x_{r-1} < y < x_r$ pour un r, $1 \leq r \leq n$ particulier. Écrivons $P' = P \cup \{y\}$.*

Alors, pour toute fonction bornée $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$L(f,P) \leq L(f,P'),$$
$$U(f,P) \geq U(f,P').$$

Dessin.

Démonstration. Nous démontrerons que $L(f,P) \leq L(f,P')$, l'autre inégalité se démontre de façon analogue.

Par définition,

$$L(f,P) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_n(x_n - x_{n-1}).$$

En calculant $L(f, P')$, le terme $m_r(x_r - x_{r-1})$ est remplacé par deux autres termes. Explicitons :

$$\begin{aligned}L(f, P') = m_1(x_1 - x_0) + \cdots + m_{r-1}(x_{r-1} - x_{r-2}) \\ + \alpha(y - x_{r-1}) + \beta(x_r - y) \\ + m_{r+1}(x_{r+1} - x_r) + \cdots + m_n(x_n - x_{n-1})\end{aligned}$$

où $\alpha = \inf\{f(x) : x \in [x_{r-1}, y]\}$ et $\beta = \inf\{f(x) : x \in [y, x_r]\}$. Dès lors, nous obtenons

$$L(f, P') - L(f, P) = (\alpha - m_r)(y - x_{r-1}) + (\beta - m_r)(x_r - y).$$

Rappelons-nous que $m_r = \inf\{f(x) : x \in [x_{r-1}, x_r]\}$ Or, puisque $[x_{r-1}, y] \subset [x_{r-1}, x_r]$, $\alpha \geq m_r$. De même, $\beta \geq m_r$ et donc $L(f, P') \geq L(f, P)$ comme annoncé. □

Corollaire 6.7. *Soient P, P' deux partitions de $[a, b]$ et supposons que $P \subset P'$. Alors, pour toute fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned}L(f, P) \leq L(f, P'), \\ U(f, P) \geq U(f, P').\end{aligned}$$

Démonstration. Écrivons
$$P' = P \cup \{y_1, \ldots, y_m\}$$
Nous pouvons appliquer le lemme précédent m-fois pour obtenir le résultat. □

Corollaire 6.8. *Soient P, P' deux partitions de $[a, b]$ quelconques. Alors pour tout fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,*

$$L(f, P) \leq U(f, P').$$

Démonstration. Écrivons $P'' = P \cup P'$. Par la définition,

$$L(f, P'') \leq U(f, P'')$$

Or, $P \subset P''$ et $P' \subset P''$, ce qui, par le corollaire précédent, entraîne que

$$L(f, P) \leq L(f, P'') \leq U(f, P'') \leq U(f, P').$$

□

Corollaire 6.9. *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors,*

$$\mathcal{L}(f) \leq \mathcal{U}(f).$$

Démonstration. Nous venons de voir que pour toute partitions P, P',

$$L(f,P) \leq U(f,P')$$

En prenant d'abord le supremum du coté gauche sur tout choix de P nous obtenons que pour toute partition P',

$$\mathcal{L}(f) \leq U(f,P')$$

En prenant maintenant l'infimum du coté droit sur tout choix de P', nous obtenons que $\mathcal{L}(f) \leq \mathcal{U}(f)$. □

Exemple 6.10. Nous pouvons maintenant démontrer directement de la définition que la fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ et intégrable.

Soit $P_n = \{0, 1/n, 2/n, \dots 1\}$ une partion de $[0,1]$. Nous avons coupé $[0,1]$ en n-sous-intervalles, chacun de largeur $1/n$. Or,

$$m_i = \inf\{x : x \in [(i-1)/n, i/n]\} = (i-1)/n,$$
$$M_i = \sup\{x : x \in [(i-1)/n, i/n]\} = i/n.$$

Donc,

$$\begin{aligned} U(f,P_n) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2}, \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i, \\ &= \frac{n(n+1)}{2n^2}, \\ &= \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

De même,

$$L(f,P_n) = \frac{n-1}{2n}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n-1}{2n} \leq \mathcal{L}(f) \leq \mathcal{U}(f) \leq \frac{n+1}{2n}$$

En prenant la limite $n \to \infty$, nous obtenons que

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{U}(f) = \frac{1}{2}.$$

On en déduit bien que $f(x) = x$ est intégrable sur $[0,1]$ et $\int_0^1 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

Evidement c'est embêtant de calculer la valeur d'une intégrale directement à partir de la définition. La technique la plus puisante est d'utiliser le théorème fondamental de l'analyse. Nous le démontrerons dans la suite, mais avant cela, nous décrivons une grande collection de fonctions intégrables.

6.2 Fonctions intégrables

Nous commencerons cette section avec un critère qui nous permettra de reconnaître des fonctions intégrables, sans avoir besoin de recourir à la définition.

> **Proposition 6.11** (Critère de Riemann)**.** *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Elle est intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partition P_ε de $[a,b]$ tel que*
> $$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Démonstration. Supposons d'abord que f est intégrable. Étant donné $\varepsilon > 0$, par la définition de supremum, il doit exister une partition P_1 tel que

$$L(f, P_1) > \mathcal{L}(f) - \frac{1}{2}\varepsilon = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\varepsilon.$$

De même, il existe une partition P_2 tel que

$$U(f, P_2) < \mathcal{U}(f) + \frac{1}{2}\varepsilon = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Soit $P = P_1 \cup P_2$. Puisque $P_1 \subset P$,

$$L(f, P) \geq L(f, P_1).$$

Puisque $P_2 \subset P$,

$$U(f, P) \leq U(f, P_2).$$

Donc

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &\leq U(f,P_2) - L(f,P_1), \\ &< \left(\int_a^b f(x) + \frac{1}{2}\varepsilon\right) - \left(\int_a^b f(x) - \frac{1}{2}\varepsilon\right), \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour la réciproque, supposons que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une partition P_ε telle que $U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$. Supposons de plus que f n'est pas intégrable, afin de trouver une contradiction.

Si f n'est pas intégrable, alors $\mathcal{U}(f) > \mathcal{L}(f)$. Soit $\varepsilon = \mathcal{U}(f) - \mathcal{L}(f)$. L'hypothèse nous donne une partition P_ε. Mais $\mathcal{U}(f) \leq U(f, P_\varepsilon)$ et $\mathcal{L}(f) \geq L(f, P_\varepsilon)$. Donc

$$\mathcal{U}(f) - \mathcal{L}(f) \leq U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon = \mathcal{U}(f) - \mathcal{L}(f)$$

Cette contradiction veut dire que f était bien intégrable. □

Nous pouvons maintenant démontrer que toute fonction continue est aussi intégrable.

Théorème 6.12. *Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est intégrable.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Nous trouverons une partition P pour laquel $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$ d'où le résultat découlera du critère de Riemann. La fonction f est continue et donc en fait elle est *uniformément* continue (grâce au théorème 4.55). Alors, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [a, b]$, avec $|x - y| < \delta$,

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Or, soit $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ une partition de $[a, b]$ tel que pour tout $i = 1, \dots, n$, $x_i - x_{i-1} < \delta$. Alors,

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

où

$$\begin{aligned} M_i &= \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i], \\ m_i &= \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]. \end{aligned}$$

Puisque $x_i - x_{i-1} < \delta$, nous avons que pour tout $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$,

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Il s'ensuit alors que, pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}), \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a), \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

L'hypothèse du critère de Riemann est satisfaite et donc f est intégrable. □

Nous vous laissons vérifier comme exercice que toute fonction continue sauf en un nombre fini de points est intégrable. Ce type de fonctions porte le nom de fonctions continues par morceaux.

6.3 Propriétés de base de l'intégrale

Nous donnons à présent quelques propriété de base de l'intégrale de Riemann. Leurs démonstrations ne sont pas difficiles et sont laissées à titre d'excellents exercices.

Théorème 6.13 (Propriétés de base de l'intégrale)**.** *Soient* $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions intégrables. Alors,*

1. *pour tout* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *la fonction* $\alpha f + \beta g$ *est intégrable et*
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x;$$
2. *pour tout* $c \in (a, b)$, f *est intégrable sur* $[a, c]$ *et sur* $[c, b]$ *et de plus*
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x;$$
3. *si* $f(x) \leq g(x)$ *pour tout* $x \in [a, b]$ *alors*
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x;$$
4. *la fonction* $|f|$ *est intégrable et*
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

6.4 Théorème fondamental de l'analyse

Nous passons maintenant au résultat le plus important de ce cours : le théorème fondamental de l'analyse. Comme nous l'avons déjà mentionné dans le premier chapitre, ce résultat dit essentiellement la chose suivante : dériver, c'est l'inverse d'intégrer. Nous avons finalement tout ce qu'il nous faut pour donner une démonstration rigoureuse de ce résultat. Nous commençons avec la répétition d'une définition déjà vue dans le premier chapitre.

Définition 6.14. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Une fonction dérivable $F\colon I \to \mathbb{R}$ est dite une primitive de f si $F' = f$.

Quand I contient ses extrémités, les dérivées à gauche et à droite d'une primitive F en ces points sont aussi égales aux valeurs de f.

Rappelons-nous que si F_1 et F_2 sont deux primitives pour la même fonction f, alors $(F_1 - F_2)' = 0$. Donc $F_1 - F_2$ est constante. On voit donc que si une primitive existe, elle est unique modulo l'addition d'une constante.

Quand $a \leq b$, nous avons déjà défini $\int_a^b f$. Quand $a > b$, nous écrivons

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Théorème 6.15 (Théorème fondamental de l'analyse, première version)**.** *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Définissons une fonction $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Alors F est dérivable et $F'(x) = f(x)$. En d'autres mots, F est une primitive de f.

Démonstration. Soit $c \in (a,b)$. Pour démontrer que F est dérivable en c avec $F'(c) = f(c)$, nous devons montrer que

$$\lim_{x\to c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c).$$

Observons que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c)\right| &= \left|\frac{\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t}{x - c} - f(c)\right|, \\
&= \left|\frac{\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x - c} - f(c)\right|, \\
&= \left|\frac{\int_c^x (f(t) - f(c))\,\mathrm{d}t}{x - c}\right|, \\
&\leq \frac{\left|\int_c^x |f(t) - f(c)|\,\mathrm{d}t\right|}{|x - c|}.
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Vu que f est continue en c, il existe $\delta > 0$ tel que si $|t - c| < \delta$ alors

$|f(t) - f(c)| < \varepsilon$. Donc pour $0 < |x - c| < \delta$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c)\right| &\leq \frac{\left|\int_c^x |f(t) - f(c)| \, \mathrm{d}t\right|}{|x - c|}, \\ &\leq \frac{\left|\int_c^x \varepsilon \, \mathrm{d}t\right|}{|x - c|}, \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Il s'ensuit que F est dérivable en c et que $F'(c) = f(c)$.

Pour $c = a$ ou $c = b$, le même raisonnement donne que F est dérivable à droite en a, à gauche en b et que ces dérivées sont égales à $f(a)$ et $f(b)$ respectivement. $\square$

Étant donné ce résultat, on voit souvent la notation $F = \int f$ pour désigner une primitive de f. Cette intégrale, dite *indéfinie*, n'est qu'une notation. L'intégrale de Riemann n'est définie que lorsqu'on parle d'un intervalle borné de la forme $[a, b]$. Néanmoins, la notation $\int f$ pour désigner une primitive de f est très utile et standard. Pour être précis, on désignera les primitives de f définie sur $[a, b]$ par $\int_c^x f \, dx$, où $c \in [a, b]$.

Formulons le théorème fondamental de l'analyse sous une deuxième forme. Celle-ci affirme que l'intégrale de Riemann de la dérivée d'une fonction se calcule en prenant la différence des valeurs prises par la fonction aux extrémités de l'intervalle.

Théorème 6.16 (Théorème fondamental de l'analyse, deuxième version)**.** *Soit $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continûment dérivable. Alors*

$$\int_a^b f'(t) \, \mathrm{d}t = f(b) - f(a)$$

Démonstration. Soit $G\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, définie par

$$G(x) = f(x) - \int_a^x f'(t) \, \mathrm{d}t$$

Par la version précédente du théorème fondamental de l'analyse, nous avons que pour tout $x \in [a, b]$,

$$G'(x) = f'(x) - f'(x) = 0$$

Donc G est constante et il s'ensuit que

$$\begin{aligned} f(b) - \int_a^b f'(t) \, \mathrm{d}t &= G(b), \\ &= G(a), \\ &= f(a). \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration. $\square$

L'écriture du théorème fondamental sous cette forme simplifie considérablement le calcul des intégrales. Sans ce résultat, il faudrait calculer l'intégrale *à partir de la définition*, une tache souvent assez pénible. Par contre, avec ce résultat en main, nous pouvons facilement calculer l'intégrale d'une fonction à condition que nous l'écrivions comme la dérivée d'une autre fonction.

Exemple 6.17.

1. Un exemple très simple :
$$\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$
Pour le voir, nous constatons que si $f(x) = \frac{x^3}{3}$, alors $f'(x) = x^2$. Donc
$$\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = f(1) - f(0) = \frac{1}{3}.$$
Souvent, on écrit $[f(x)]_a^b$ pour $f(b) - f(a)$.
2. Dans le plan xy, nous voulons trouver l'aire de la région bornée par le graphe de la fonction définie par $f(x) = x^3 + 2$, la droite horizontale $y = 0$, les droites verticales $x = 0$ et $x = 1$. On calcule
$$\begin{aligned} \text{Aire} &= \int_0^1 (x^3 + 2)\,\mathrm{d}x, \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + 2x\right]_0^1, \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$
Attention tout de même, dans la définition de l'intégrale d'une fonction f, dans une région où $f < 0$, les rectangles ont de « l'aire » *négative*. Autrement dit, l'intégrale ne donne pas précisément l'aire en-dessous du graphe, mais l'aire « comptée » positivement si le graphe se trouve au-dessus de l'axe $y = 0$, négativement si le graphe se trouve en-dessous de cet axe.
Or, si on veut l'aire totale, avec toute région comptée *sans* signe, il faut procéder soigneusement en coupant le domaine de f en morceaux quand le signe de f change.
3. Par exemple, nous voulons trouver l'aire entre le graphe de $f(x) = x^2 - x$, l'axe horizontal et les droites $x = -1$ et $x = 1$.
Cette fois, le signe de la fonction change. $f(0) = 0 = f(1)$. Pour $x < 0$, on a $f(x) > 0$; pour $0 < x < 1$, on a $f(x) < 0$. Donc,
$$\text{Aire} = \int_{-1}^0 (x^2 - x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 (x^2 - x)\,\mathrm{d}x.$$
Or,
$$\int_{-1}^0 (x^2 - x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

$$\int_0^1 (x^2 - x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}.$$

Donc l'aire totale est $5/6 + 1/6 = 1$.

6.5 Techniques pour calculer

Les deux techniques les plus utiles pour calculer les intégrales sont l'intégration par parties et l'intégration par substitution. Elles sont en effet, respectivement, les réciproques de la règle de Leibniz et de la règle de dérivation en chaîne.

Proposition 6.18 (Intégration par parties)**.** *Soient $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continûment dérivables. Alors,*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. La fonction $h(x) = f(x)g(x)$ est continûment dérivable sur $[a,b]$ avec $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Le théorème fondamental de l'analyse affirme que

$$\int_a^b h'(x)\,\mathrm{d}x = [h(x)]_a^b\,,$$

c'est-à-dire

$$\int_a^b \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b\,.$$

Le résultat découle maintenant de la linéarité de l'intégrale. □

Proposition 6.19 (Changement de variable)**.** *Soient f continue et g continûment dérivable. Supposons que $g(\alpha) = a$ et $g(\beta) = b$. Alors,*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta (f \circ g)(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Soient $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(t) = (F \circ g)(t)$. Par la règle de dérivation en chaîne, suivie du théorème fondamental de l'analyse, nous obtenons

$$\begin{aligned} G'(t) &= F'(g(t))g'(t), \\ &= f(g(t))g'(t), \\ &= (f \circ g)(t)g'(t). \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (f\circ g)(t)g'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_\alpha^\beta G'(t)\,\mathrm{d}t,\\ &= G(\beta)-G(\alpha),\\ &= F(g(\beta))-F(g(\alpha)),\\ &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

□

La formule ci-dessus explique ce qui se passe quand on change la variable dans l'intégrale par une autre variable t qui est liée à x par la « formule » $x = g(t)$. Evidement,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g'(t)$$

Si on pouvait traiter dx et dt comme des nombres, on pourrait écrire

$$\mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'où la formule

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t$$

serait immédiate. Le problème avec ce raisonnement est que les quantités « dx » et "dt" n'existent pas en tant que nombres réels et donc cet argument n'a pas valeur de preuve !

Il existe une théorie, appelée théorie des formes différentielle, qui donne un sens aux expressions dx et dt. Ce ne sont pas des nombres réels, mais des objets algébriques un peu plus compliquées. Dans cette théorie, l'équation $\mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t$ trouve un sens. La théorie des formes différentielles est expliquée dans le cours de géométrie différentielle du bachelier. Pour nous, la formule ci-dessus n'a pas de sens et sa seule valeur est mnémotechnique.

Exemple 6.20.

1. Nous voulons calculer
$$\int_0^r xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$
Soit $g(t) = t^2$. Alors $g'(t) = 2t$. Si $f(x) = e^{-x}$ alors $(f\circ g)(t)g'(t) = 2te^{-t^2}$. Donc,
$$\begin{aligned}\int_0^r te^{-t^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^r (f\circ g)(t)g'(t)\,\mathrm{d}t,\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{r^2} e^{-x},\mathrm{d}x,\\ &= \frac{1}{2}\left(1-e^{-r^2}\right).\end{aligned}$$

Si on préfère utiliser la formule de changement de variable, on écrit $t = x^2$ et donc « $\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$ » ! ! ! De plus, $x = r$ implique que $t = r^2$. Il s'ensuit que

$$\int_0^r xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{r^2} e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

et on termine le calcul comme précédement.

2. On peut aussi utiliser cette méthode pour les intégrales indéfinies. Par exemple, calculons une primitive de la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{x\log(x)}.$$

Nous prenons $x = e^t$, si bien que « $\mathrm{d}x = e^t\mathrm{d}t$ ». On obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\log(x)}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{te^t}\cdot e^t\,\mathrm{d}t,\\ &= \int \frac{1}{t}\mathrm{d}t,\\ &= \log(t),\\ &= \log(\log(x)).\end{aligned}$$

Pour vérifier que notre solution est juste, il suffit de prendre la dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log(\log(x)) = \frac{1}{\log(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log(x) = \frac{1}{x\log(x)}.$$

6.6 Intégrales impropres

La définition de l'intégrale de Riemann s'applique uniquement aux fonctions *bornées* sur les intervalles *bornés*. Dans cette section, nous considérons l'intégrale dans des situations ou on peut enlever ces contraintes.

Définition 6.21. Soit $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction bornée qui est intégrable sur $[a,b]$ pour tout $b > a$. Si la limite

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

existe, on dit que $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et on note cette limite par $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$. Une telle intégrale est dite une *intégrale impropre*.

Si la limite n'existe pas, on dit que $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

Pour une fonction bornée $f\colon (-\infty,b] \to \mathbb{R}$, on définit de façon analogue l'intégrale $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour une fonction bornée $f\colon (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$, on définit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

à condition que les deux intégrales impropres existent.

Exemple 6.22.

1. Démontrons que
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} = 1.$$
Pour le voir, constatons d'abord que la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$ est bornée sur $[1, \infty)$ et intégrable sur toute sous-intervalle borné (puisque elle est continue). De plus,
$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 1 - \frac{1}{b}.$$
Le résultat découle facilement puisque $1 - 1/b \to 1$ lorsque $b \to \infty$.
2. Démontrons que l'intégrale
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1/2}}$$
est divergente. Pour le voir, constatons que
$$\int_1^b \frac{1}{x^{1/2}}\mathrm{d}x = \left[2x^{1/2}\right]_1^b = 2(b^{1/2} - 1).$$
Mais $2(b^{1/2} - 1) \to \infty$ lorsque $b \to \infty$.
3. Démontrons que
$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x)\mathrm{d}x$$
diverge. Pour le voir, constatons que
$$\int_0^b \sin(x) = [-\cos(x)]_0^b = 1 - \cos(b)$$
n'a pas de limite lorsque $b \to \infty$. Donc $\int_0^{\infty} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ diverge et dès lors l'intégrale sur $(-\infty, \infty)$ diverge forcément aussi.
En revanche, pour tout $b \geq 0$,
$$\int_{-b}^{b} \sin(x)\mathrm{d}x = 0$$
(puisque $\sin(-x) = -\sin(x)$) et donc
$$\lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Donc il est très important dans la définition de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ de considérer les deux intégrales impropres sur $(-\infty, 0)$ et $(0, \infty)$ *indépendamment.*

On peut aussi utiliser les limites pour définir l'intégrale d'une fonction qui n'est pas bornée.

Définition 6.23. Soit $f\colon (a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction qui est intégrable sur $[a+\varepsilon, b]$ pour tout $0 < \varepsilon < b - a$. Si la limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

existe, on dit que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et on note cette limite par $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Une telle intégrale est également appelée *intégrale impropre.*

Exemple 6.24.

1. Démontrons que
$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}\mathrm{d}x = 2.$$
Pour le voir, constatons que la fonction $f(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ est intégrable sur tout intervalle de la forme $[\varepsilon, 1]$. De plus,
$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^{1/2}}\mathrm{d}x = \left[2x^{1/2}\right]_\varepsilon^1 = 2(1 - \varepsilon^{1/2})$$
Cette dernière expression tend vers 2 lorsque ε tends vers zéro.
2. Démontrons que
$$\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
est divergente. Pour le voir, constatons que
$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\log(x)]_\varepsilon^1 = -\log(\varepsilon).$$
Mais $\log(\varepsilon) \to -\infty$ lorsque $\varepsilon \to 0$.
3. Si la « singularité » de f se trouve au milieu de la région sur laquelle on veut prendre l'intégrale, il faut couper la région en deux.
Considérons par exemple la fonction définie par
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Evidement, l'intégrale $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ ne converge pas, puisque f n'est même pas intégrable sur $[0,1]$. Par contre, par symétrie, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Alors il est très important dans la définition de $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ de considérer les deux cotés de la singularité. *indépendamment.*

Parfois, il n'est pas possible de trouver une bonne expression pour $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(x)$ en termes de b. Dans une telle situation, la proposition suivante est très utile pour démontrer que l'intégrale impropre existe quand même.

Proposition 6.25 (Critère de comparaison pour les intégrales)**.** *Soient f, g deux fonctions définies sur $[a,\infty)$ et intégrables sur $[a,b]$ pour tout $b > a$. Supposons que*
– $0 \le f(x) \le g(x)$ *pour tout* $x \ge a$,
– $\int_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ *converge.*
Alors $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *converge aussi.*

Démonstration. Comme $f(x) \le g(x)$ pour tout $x \ge a$, pour tout $b > a$,

$$\int_a^b f(x), \mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Puisque $f(x) \ge 0$ pour tout $x \ge a$, la fonction

$$F \colon b \mapsto \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

est croissante. De même pour g. Donc, F est croissante et majorée par $\int_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$. Donc la limite de $F(b)$ lorsque $b \to \infty$ existe. $\square$

Il y a aussi une version de ce résultat pour les intégrales impropres de l'autre type. (Voyez la feuille d'exercices !)

On peut utiliser ce critère dans les deux sens : si $\int_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge alors $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge aussi ; si $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge, alors $\int_a^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ diverge aussi.

Exemple 6.26.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$\int_1^{\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

converge. Pour le voir, constatons d'abord que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $x^m e^{-x} \to 0$ lorsque $x \to \infty$. Il existe donc x_0 tel que pour $x \geq x_0$,

$$x^m e^{-x} \leq 1.$$

Alors, en prenant $m = n + 2$, pour tout $x \geq x_0$, nous avons que

$$x^n e^{-x} \leq \frac{1}{x^2}.$$

Nous avons déjà vu que $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1$. Donc $\int_1^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge aussi.

2. L'intégrale

$$\int_1^\infty \frac{1}{\log(x)+1}\mathrm{d}x$$

est divergente. Pour le voir, constatons d'abord que pour tout $x \geq 1$, $\log(x) + 1 \leq x$. Pour démontrer cette inégalité, prenons $f(x) = x - \log(x)$. Or, $f(1) = 1$ et $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \geq 0$ pour tout $x \geq 1$. Donc $f(x) \geq 1$ pour tout $x \geq 1$, ce qu'il fallait démontrer.

A présent, la divergence de l'intégrale découle du test de comparaison : pour tout $x \geq 1$, $\frac{1}{1+\log(x)} \geq \frac{1}{x}$ et l'intégrale de $\frac{1}{x}$ sur $[1, \infty)$ est divergente.

6.7 Longueur d'une courbe

Nous avons introduit l'intégrale pour calculer l'aire en dessous d'une courbe. Elle sert aussi pour trouver la longueur d'une courbe. Pour cette application nous avons besoin de la définition d'une courbe différentiable.

Définition 6.27. Soit $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continûment dérivable. Supposons que $\gamma'(t) \neq 0$ pout tout $t \in [a,b]$. L'image de γ,

$$C = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$$

est appelée *une courbe differentiable*, où simplement *une courbe*. L'application γ est *une parametrisation de* C.

Constatons qu'une courbe différentiable possède beaucoup de paramétrisations distinctes. Étant donné une paramétrisation $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, la composition avec n'importe quel application $f\colon [c,d] \to [a,b]$ continûment différentiable donne une application $\hat{\gamma} = \gamma \circ f\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$. La règle de dérivation en chaîne montre que $\hat{\gamma}'(t) = \gamma'(f(t))f'(t)$. Il s'ensuit que si $f'(t)$ n'est jamais nul, et donc $\hat{\gamma}'(t)$ est également de signe constant. De plus, si f est surjective, l'image de $\hat{\gamma}$ est égale à celle de γ. Donc, sous la condition que

$f\colon [a,b] \to [c,d]$ est strictement montone et surjective, $\hat{\gamma} = \gamma \circ f$ est une autre paramétrisation de la même courbe C. Quand on parle d'une courbe avec une paramétrisation particulière, on parle *d'une courbe paramétrée.*

La condition $\gamma'(t) \neq 0$ sert a éviter des « singularités » sur la courbe. Géométriquement, cela signifie qu'il doit être toujours possible de trouver un vecteur tangent à la courbe. Par exemple, pour la courbe $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ il n'est pas possible de définir un vecteur tangent à la courbe en $(0,0)$.

Définition 6.28. Soit $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ une paramétrisation d'une courbe différentiable C. Si γ est injective sur (a,b), C est dite *simple.*

Définition 6.29. Soit $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ une paramétrisation d'une courbe C qui est différentiable. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ alors C est appelé *un lacet.* Si, de plus, $\gamma'(a) = \gamma'(b)$, C est un *lacet différentiable.* Ici, $\gamma'(a)$ indique la dérivée à droite en a et $\gamma'(b)$ la dérivée à gauche en b.

Exemple 6.30.

1. *Le cercle.* Soit $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ donné par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, une paramétrisation du cercle unitaire S^1 dans $\mathbb{R}^2$. Le cercle est un lacet simple différentiable.
2. *Le carré.* Les arrêtes d'un carré dans $\mathbb{R}^2$ fournissent un exemple d'une courbe différentiable par morceaux. Elle est un lacet simple.
3. *L'hélice.* Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donné par $\gamma(t) = (\cos(at), \sin(at), bt)$. La courbe paramétrée par γ est appelée une hélice.
4. Soit $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ donné par

$$\gamma(t) = \left(\frac{\sin t}{1 + \cos^2 t}, \frac{\sin t \cos t}{1 + \cos^2 t} \right).$$

La courbe C paramétrisée par γ est le chiffre 8 sur son coté. Elle s'appelle *la lemniscate de Bernoulli.* Voyez figure 16. La courbe C est l'ensemble des points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.
Cette courbe est un lacet différentiable, mais elle n'est pas simple. La partie décrite par $\gamma|[0,\pi]$ est un lacet différentiable par morceaux, mais pas un lacet différentiable : $\gamma(0) = \gamma(\pi)$, mais les dérivées ne sont pas égales.

Calculons à présent la longueur d'une courbe.

Définition 6.31. Étant donné une courbe différentiable C paramétrée par $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, *la longueur de* C est définie par

$$L(C) \coloneqq \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t.$$

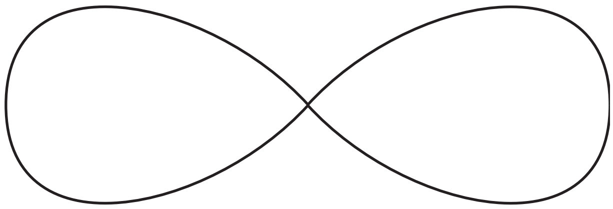


FIGURE 16 – *Le lemniscate de Bernoulli*

Intuitivement, $\gamma'(t)$ est le vecteur vitesse avec laquelle la courbe est décrite et donc $\|\gamma'(t)\|$ est la vitesse instantanée. Pour trouver la longueur, on prend l'intégrale de la vitesse. Pour que cette définition soit conforme à notre intuition de la longueur d'une courbe, il faut vérifier que $L(C)$ ne dépend pas de la paramétrisation.

Lemme 6.32. *Soit $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une paramétrisation d'une courbe différentiable et soit $f\colon [c,d] \to [a,b]$ continûment différentiable, bijective, telle que $f'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [c,d]$. Alors,*

$$\int_c^d |(\gamma \circ f)'(u)| \,\mathrm{d}u = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Nous utilisons f pour changer la variable $t = f(u)$ dans la deuxième l'intégrale. Ceci nous donne

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_c^d \|\gamma'(f(u))\| \, |f'(u)| \,\mathrm{d}u.$$

Or, la règle de dérivation en chaine nous dit que $(\gamma \circ f)'(u) = f'(u)\gamma'(f(u))$ et le résultat découle d'ici. $\square$

Quelle que soit la paramétrisation que l'on utilise, la longueur de la courbe reste inchangée, ce qui est très rassurant ! Avec la définition de longueur en main, nous pouvons donc choisir notre paramétrisation préférée pour une courbe donnée. Il est pratique de choisir une paramétrisation telle que le vecteur vitesse est de longueur 1 en tout point de la courbe.

Définition 6.33. Soit $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une paramétrisation d'une courbe différentiable. Cette paramétrisation est appelée *une paramétrisation par longueur* si $\|\gamma'(t)\| = 1$ pour tout $t \in [a,b]$.

Constatons que si $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ et une paramétrisation par longueur, alors $L(C) = b-a$. De plus, la longueur de la courbe entre deux points $\gamma(p)$ et $\gamma(q)$ quelconque est $|p-q|$. Ceci devrait vous convaincre qu'il s'agit d'une paramétrisation pratique pour les calculs.

Lemme 6.34. *Soit C une courbe différentiable. Alors il existe une paramétrisation de C par longueur.*

Démonstration. Soit $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une paramétrisation quelconque de C. Nous définissons la fonction $s\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ par

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(p)\| \,\mathrm{d}p.$$

C'est à dire que $s(t)$ est la longueur de la partie décrite par $\gamma([a,t])$ sur la courbe C. Par le théorème fondamental de l'analyse, s est dérivable et $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$, qui n'est jamais nul. Donc s est strictement croissante et nous donne une bijection $s\colon [a,b] \to [0,L]$ où $L = L(C)$. Par le théorème de la fonction réciproque, la réciproque $f\colon [0,L] \to [a,b]$ de s est dérivable avec dérivée

$$f'(t) = \frac{1}{s'(f(t))} = \frac{1}{\|\gamma'(f(t))\|}.$$

Nous pouvons donc utiliser f pour reparamétriser C. La paramétrisation $\gamma \circ f\colon [0,L] \to \mathbb{R}^n$ de C a la propriété que

$$\|(\gamma \circ f)'(t)\| = \|\gamma'(f(t))\| \, |f'(t)| = 1.$$

$\square$

Exemple 6.35.

1. *Le cercle.* Soit $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ donné par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$. Alors $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ et $\|\gamma'(t)\| = 1$. Ceci confirme que la longueur du cercle de rayon 1 est 2π.
2. *L'hélice.* Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donné par $\gamma(t) = (\cos(at), \sin(at), bt)$. La courbe paramétrée par γ est un hélice. Puisque $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2+b^2}$ la longueur de la partie de l'hélice entre $\gamma(p)$ et $\gamma(q)$ est $\sqrt{a^2+b^2}|p-q|$.

6.8 L'intégrale curviligne

L'intégrale curviligne est l'intégrale d'une fonction le long d'une courbe. De tels intégrales surviennent en physique. Supposons que le déplacement d'un mobile est décrit par une courbe $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ et, qu'en même temps, il y a une force $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui agit sur ce dernier. Alors, le travail élémentaire fournit par F est $\langle F, \gamma'(t)\rangle$. Pour trouver le travail total, on doit prendre l'intégrale du travail élémentaire le long de la courbe.

Définition 6.36. Soient $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une paramétrisation d'une courbe différentiable C, et $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, l'intégrale de g le long de C est définie par

$$\int_C g\,\mathrm{d}s := \int_a^b g(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Quand C est un lacet, on voit souvent la notation $\oint_C g\,\mathrm{d}s$ pour désigner l'intégrale de g le long de C.

Evidemment, il faut de nouveau vérifier que la définition ne dépend pas de la paramétrisation.

Lemme 6.37. *Soit $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une paramétrisation d'une courbe C et soit $f\colon [c,d] \to [a,b]$ continûment différentiable, bijective, avec $f'(u) \neq 0$ pour tout $u \in [c,d]$. Écrivons, $\hat{\gamma} = \gamma \circ f\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ pour décrire la nouvelle paramétrisation de C. Si $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue, alors*

$$\int_c^d g(\hat{\gamma}(u))\|\hat{\gamma}'(u)\|\,\mathrm{d}u = \int_a^b g(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Nous utilisons f pour changer la variable $t = f(u)$ dans la deuxième intégrale. Ceci nous donne

$$\int_a^b g(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_c^d g(\gamma \circ f(u))\|\gamma'(f(u))\|\,|f'(u)|\,\mathrm{d}u.$$

Maintenant le résultat découle de la règle de dérivation en chaîne qui dit que

$$\hat{\gamma}'(u) = (\gamma \circ f)'(u) = f'(u)\gamma'(f(u)).$$

□

Remarquons que pour une paramétrisation par longueur $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$, l'intégrale de g le long de C a la forme simple

$$\int_C g\mathrm{d}s = \int_a^b g(\gamma(s))\,\mathrm{d}s.$$

Dans ce contexte, on voit souvent le formule $\mathrm{d}s = \|\gamma'(t)\|\mathrm{d}t$. Il s'agit de nouveau d'un bon aide mémoire pour changer la variable dans une intégrale curviligne, mais comme nous l'avons déjà fait remarquer, cet aide mémoire n'est pas une preuve rigoureuse : nous n'avons pas défini les objets $\mathrm{d}s$ et $\mathrm{d}t$. Nous préférons écrire $\mathrm{d}s$ ou $\mathrm{d}t$ *seulement comme une* *partie d'une intégrale* et la notation $\int_C f \,\mathrm{d}s$ est définie comme ci-dessus. Dans ce cours, la formule $\mathrm{d}s = \|\gamma'(t)\|\mathrm{d}t$ est uniquement une manière paresseuse d'écrire $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|\gamma'(t)\|$.

Pour l'exemple du travail fournit par une force ou pour calculer la circulation en mécanique des fluides, il faut un autre type d'intégrale curviligne. Considérons un champ de vecteurs. Il s'agit d'une fonction $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (par exemple une force). La quantité $\langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$ que nous voudrions intégrer dépend cette fois aussi de la direction $\gamma'(t)$, et pas juste du point $\gamma(t)$.

Définition 6.38. Étant donné une courbe différentiable C paramétrée par $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ et un champ de vecteurs $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continu, *le travail de F le long de C* ou *la circulation de F le long de C* est définie par

$$\int_C \langle F, \mathrm{d}x\rangle := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \,\mathrm{d}t.$$

Bien sûr, il faut à nouveau vérifier que cette définition ne dépend pas de la paramétrisation choisie.

Lemme 6.39. *Soit $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ une paramétrisation d'une courbe C et soit $f\colon [c,d] \to [a,b]$ continûment différentiable, bijective, telle que $f'(u) > 0$ pour tout $u \in [c,d]$. Écrivons, $\hat{\gamma} = \gamma \circ f\colon [c,d] \to \mathbb{R}^3$ pour décrire la nouvelle paramétrisation de C. Si $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est continue, alors*

$$\int_c^d \langle F(\hat{\gamma}(u)), \hat{\gamma}'(u)\rangle \,\mathrm{d}u = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Nous utilisons f pour changer la variable $t = f(u)$ dans la deuxième intégrale. Ceci nous donne

$$\int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \,\mathrm{d}t = \int_c^d \langle F(\gamma \circ f(u)), \gamma'(f(u))\rangle \, f'(u) \,\mathrm{d}u,$$

où nous avons utilisé le fait que $f'(u) > 0$. Le résultat découle comme chaque fois de la règle de dérivation en chaîne qui dit que

$$\hat{\gamma}'(u) = (\gamma \circ f)'(u) = \gamma'(f(u))f'(u).$$

$\square$

Il est important de comparer ce résultat avec le lemme 6.37 qui dit que l'intégrale curviligne d'une fonction le long de C ne dépend pas de la paramétrisation. Dans le lemme 6.37, on peut utiliser une autre paramétrisation donnée par $f\colon [c,d] \to [a,b]$ avec $f'(u) \neq 0$. Ici, par contre, il faut absolument que $f'(u) > 0$. Ceci est nécessaire parce que *le travail de F le long de C est sensible à la direction dans laquelle la courbe est tracée.* Si on change la parametrisation par $f$tel que $f'(u) < 0$, on suit la courbe dans la direction inverse et il est clair que le signe du travail de F le long de C change. On peut donc conclure que la circulation, au signe près, ne dépend pas de la paramétrisation.

Finalement, remarquons que, comme pour $\mathrm{d}s$, on voit souvent dans les livres la formule $\mathrm{d}x = \gamma'(t)\,\mathrm{d}t$. A nouveau, il est possible de définir tous les termes pour donner un sens à cette équation, mais nous préférons écrire $\mathrm{d}x$ seulement comme partie d'une intégrale $\int_C \langle F, \mathrm{d}x\rangle$ qui est, elle, bien définie d'après la définition 6.38 et le lemme 6.39.

Exemple 6.40.

1. Nous voulons évaluer l'intégrale de la fonctions
$$g(x,y,z) = \sqrt{\frac{a^2y^2}{b^2} + \frac{b^2x^2}{a^2}}$$
le long de l'ellipse C décrite par les équations
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0.$$
Une paramétrisation de l'ellipse est donnée par $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ où
$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t, 0).$$
On observe que
$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (-a\sin t, b\cos t, 0),\\ \|\gamma'(t)\| &= \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t},\\ g(\gamma(t)) &= \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}.\end{aligned}$$
Dès lors
$$\int_C g\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)\,\mathrm{d}t = \pi(a^2+b^2).$$
2. Soit le champs de vecteurs $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donné par $F(x,y,z) = (z,x,y)$. Dans cet exemple, nous calculons la circulation de F autour du cercle $x^2 + y^2 = r^2$ où le cercle est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre, du point de vu d'un observateur qui regarde dans la direction positive du troisième axe. Le cercle est paramétré par $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, 0)$. La circulation de F est

donnée par l'intégrale

$$\begin{aligned}
\int_C \langle F, (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)\rangle &= \int_0^{2\pi} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \,\mathrm{d}t, \\
&= \int_0^{2\pi} \langle (0, r\cos t, r\sin t), (-r\sin t, r\cos t, 0)\rangle \,\mathrm{d}t, \\
&= \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2 t \,\mathrm{d}t, \\
&= \pi r^2.
\end{aligned}$$

6.9 Champs conservatifs

Nous avons vu qu'associé à une fonction $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable, il y a un champ de vecteurs $\nabla g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}\right).$$

Ce genre de champs est tellement important qu'ils portent un nom particulier.

Définition 6.41. Un champ de vecteurs $F\colon V \to \mathbb{R}^n$ défini sur un ouvert $V \subset \mathbb{R}^3$ est dit *conservatif* s'il existe une fonction $g\colon V \to \mathbb{R}$ tel que $F = \nabla g$.

L'adjectif « ouvert » associé à un ensemble V signifie que pour tout $x \in V$ il existe $r > 0$ tel que si $|y - x| < r$ alors y est aussi dans V. Donc pour tout élément $x \in V$, V contient aussi les points proches de x.

Exemple 6.42. D'après la règle de Newton, la force gravitationnelle exercée par un corps à l'origine est proportionnel à l'inverse du carré de la distance à l'origine. Elle est donc donnée par le champ de vecteurs $F\colon \mathbb{R}^3 \setminus 0 \to \mathbb{R}^3$

$$F(x, y, z) = -\frac{(x, y, z)}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$$

Constatons que $\|F(x, y, z)\| = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$ qui est l'inverse du carré de la distance de (x, y, z) à l'origine.

On voit que F est un champ conservatif parce que $F = \nabla g$ où

$$g(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

La fonction g s'appelle *le potentiel de Newton.*

Lemme 6.43. *Soit $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champ conservatif. Alors, le travail de F le long d'une courbe $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ ne dépend que des points $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ et pas de la courbe γ elle-même.*

Démonstration. Soit $F = \nabla g$. On calcule

$$\begin{aligned}\int_C \langle F, \mathrm{d}x\rangle &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \langle \nabla g(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \,\mathrm{d}t, \\ &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g\circ\gamma)(t)\,\mathrm{d}t, \\ &= g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).\end{aligned}$$

□

On peut voir ce résultat comme une version vectorielle du théorème fondamentale de l'analyse. Il dit que pour une courbe qui commence en p et termine en q,

$$\int_C \langle \nabla g, \mathrm{d}x\rangle = g(p) - g(p).$$

Constatons que si C est fermée, avec $p = q$, alors $\int_C \langle \nabla g, \mathrm{d}x\rangle = 0$.

En fait, le comportement décrit par lemme 6.43 caractérise les champs conservatifs.

Lemme 6.44. *Soit $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un champs tel que pour toute courbe C, $\int_C \langle F, \mathrm{d}x\rangle$ ne dépend que des extrémités de C. Alors F est un champ conservatif.*

Démonstration. Nous définissons $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tel que $\nabla g = F$. Étant donné $p \in \mathbb{R}^n$, considérons une courbe C différentiable qui commence on 0 et qui termine en p. Notons

$$g(p) = \int_C \langle F, \mathrm{d}x\rangle.$$

Par l'hypothèse $g(p)$ ne dépend pas du choix de C et donc g est bien définie.

Pour vérifier que $\nabla g = F$, rappelons qu'il suffit de démontrer que pour tout vecteur $V \in \mathbb{R}^n$, $\langle \nabla g(p), V\rangle = \langle F(p), V\rangle$. Constatons que $\langle \nabla g(p), V\rangle = \partial_V g(p)$. Dès lors, étant donné $p, V \in \mathbb{R}^3$, prenons $\gamma\colon [0,2] \to \mathbb{R}^n$ une courbe C qui commence en 0, qui passe par p quand $t = 1$ et qui a la forme d'une droite près de $t = 1$ dans la direction V. On observe que

$$\begin{aligned}
\partial_V g(p) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g \circ \gamma)(1), \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=1} \int_0^t \langle F(\gamma(t), \gamma'(t)\rangle \mathrm{d}t, \\
&= \langle F(\gamma(1)), \gamma'(1)\rangle, \\
&= \langle F(p), V)\rangle.
\end{aligned}$$

□